

# Morpion sur des pavages réguliers

Sujet proposé par Ivan Hasenohr

Le jeu du morpion est un jeu universel aux règles on ne peut plus simples : il se déroule sur une grille de 3 cases par 3 case. Deux joueurs s'affrontent en inscrivant tour à tour un symbole ( $\times$  pour le premier joueur, aussi appelé joueur  $A$ , et  $\circ$  pour le second joueur, aussi appelé joueur  $B$ ). Le jeu s'arrête lorsqu'un joueur a réussi à aligner trois de ses symboles sur une ligne, colonne ou une diagonale, auquel cas ce joueur remporte la partie. S'il n'y a plus de cases vides et qu'aucun joueur n'a aligné trois symboles, la partie s'arrête sur une égalité.

$\times$	$\circ$	$\circ$
$\circ$	$\times$	
$\times$		$\times$

Le joueur  $A$  gagne

## Commençons tranquillement

Alice et Bob s'affrontent au jeu de morpion et se posent diverses questions : quelles sont les issues possibles d'un jeu de Morpion ? Le joueur  $A$  peut-il trouver une stratégie pour toujours gagner ? Et le joueur  $B$  ? Peuvent-ils trouver des stratégies pour ne jamais perdre (c'est-à-dire pour gagner ou faire égalité) ?

$\times$	$\circ$	$\circ$
$\circ$	$\times$	$\times$
$\times$	$\times$	$\circ$

Cas d'égalité

## On a besoin d'air !

Alice et Bob trouvent qu'ils ont épuisé les possibilités du jeu, et se demandent s'ils peuvent le modifier un peu pour y rajouter de la variété. Inspirés, ils se proposent de garder les mêmes règles, mais de ne plus jouer sur une grille de 3 par 3, mais plutôt sur une grille infinie. D'autres questions se posent alors à eux : le jeu peut-il durer indéfiniment ? Existe-t-il toujours des stratégies optimales pour les différents joueurs ?

Et que se passerait-il si, pour gagner, il fallait aligner 4 symboles au lieu de 3 ? Est-ce qu'il est maintenant plus difficile ou plus facile pour le joueur  $A$  de gagner ? Et pour le joueur  $B$  ? Et si on en alignait 5, pourrait-on en déduire quelque chose ?

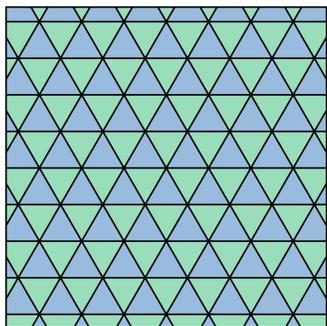
					$\times$	
				$\times$		
			$\times$	$\circ$		
	$\circ$	$\circ$				

Morpion sur une grille infinie

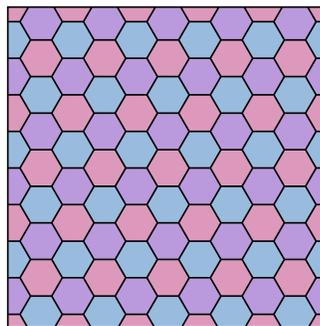
## Pourquoi s'en tenir à des carrés ?

Alice et Bob ont des envies d'exotique : ils se demandent si on pourrait jouer au Morpion sur autre chose qu'une simple grille. Après tout, qu'est-ce qui nous empêche de jouer sur des formes plus complexes que des carrés ? Ils se demandent donc sur quels types de plateaux de jeu ils pourraient jouer.

Pour commencer, ils s'intéressent aux pavages réguliers : c'est-à-dire des façons de recouvrir une surface plane avec un seul polygone régulier. Ils découvrent qu'il en existe trois types, avec des triangles, des hexagones, ou des carrés (mais ça, ils ont déjà testé !). Ils se demandent donc si sur ces pavages là, on peut jouer au morpion. Et si c'est le cas, est-ce qu'on peut retrouver des propriétés similaires à celles qu'on avait trouvées pour la grille infinie : est-ce que c'est toujours le même joueur qui gagne, et si oui comment ? Et si de nouveau on devait aligner 4 symboles au lieu de 3 ? Et 5 ?



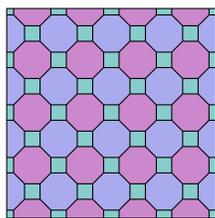
Pavage triangulaire



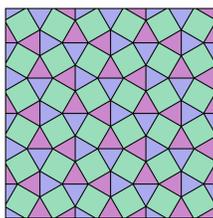
Pavage hexagonal

## Des polygones dans tous les sens

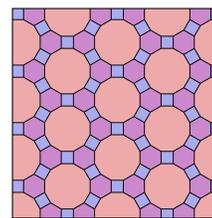
On ne peut plus arrêter Alice et Bob : ils se disent maintenant que c'est dommage de se restreindre à jouer au morpion sur un plateau qui ne contient qu'un seul type de polygone ! Ils se demandent si tout ce qu'ils ont découvert sur le jeu pouvait se généraliser à d'autres types de pavages, comme par exemple ces drôles de pavages qu'ils ont découverts dans un vieux livre.



Pavage carré tronqué



Pavage carré adouci



Pavage grand rhombitrihexagonal

Quelles sont les conditions permettant de jouer au morpion sur un pavage de ce type ? S'il est possible d'y jouer, est-ce qu'on a toujours une stratégie gagnante pour le premier joueur ? Et si on devait aligner 4 ou 5 symboles ? Et si ce n'est pas possible, pourrait-on modifier les règles du morpion pour les adapter au pavage ?

## Où sont Alice et Bob ?

Cela fait des jours qu'on a vu ni Alice et Bob. Ils se sont enfermés dans une bibliothèque, à la recherche d'un pavage égalitaire, où les deux joueurs aient une chance égale de gagner. Pouvez-vous les aider ?