

# Preuves assistées par ordinateur de non-atteignabilité pour des problèmes linéaires de contrôle sous contraintes

Ivan Hasenohr

Doctorat sous la direction de Camille Pouchol, Yannick Privat et Christophe Zhang

Université Paris Cité

Groupe de Travail des Éphémères



- 1 Théorie du contrôle
- 2 Non-atteignabilité : approche géométrique
- 3 Preuve assistée par ordinateur
  - Erreurs de discrétisation
  - Erreurs d'arrondis
  - Minimisation de  $J$
- 4 Résultats numériques
- 5 Conclusion

- 1 Théorie du contrôle
- 2 Non-atteignabilité : approche géométrique
- 3 Preuve assistée par ordinateur
  - Erreurs de discrétisation
  - Erreurs d'arrondis
  - Minimisation de  $J$
- 4 Résultats numériques
- 5 Conclusion

On appelle système contrôlé le système :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t) & \forall t \in [0, T] \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n \\ u(t) \in \mathcal{U}_0 \subset \mathbb{R}^m & \forall t \in [0, T]. \end{cases} \quad (S)$$

On note :

- $y(\cdot; y_0, u) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  la solution de (S)
- $\mathcal{U}$  l'ensemble des contraintes sur le contrôle
- $L_T$  l'application entrée-sortie :

$$L_T : u \mapsto \int_0^T e^{(T-t)A} Bu(t) dt,$$

on a :

$$y(T; y_0, u) = e^{TA} y_0 + L_T u.$$

# Atteignabilité

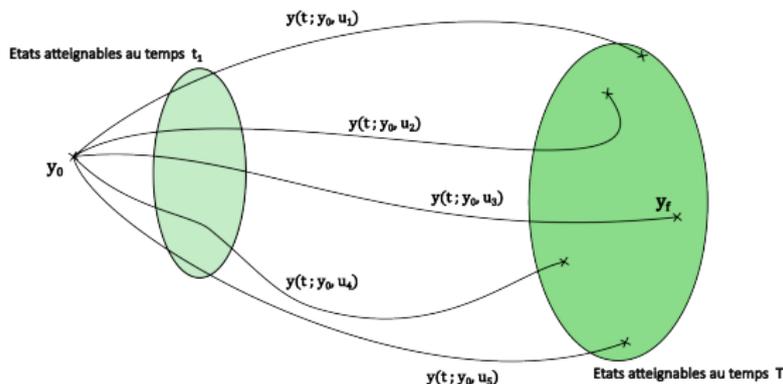
Soit  $y_f \in \mathbb{R}^n$  une cible, soit  $\mathcal{U}$  un ensemble de contraintes sur le contrôle.

## Définition

$y_f$  est dit  $\mathcal{U}$ -atteignable pour  $(S)$  de  $y_0$  en temps  $T$  si :

$$\exists u \in \mathcal{U}, \quad y(T; y_0, u) = y_f.$$

On appelle ensemble atteignable l'ensemble des points  $\mathcal{U}$ -atteignables.

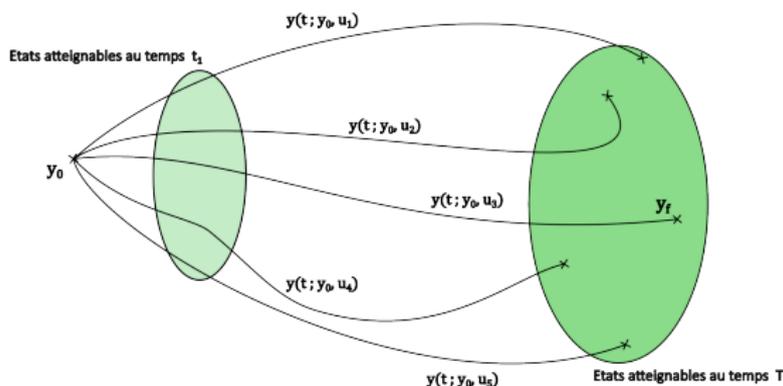


## Définition

$y_f$  est dit  $\mathcal{U}$ -atteignable pour  $(S)$  de  $y_0$  en temps  $T$  si :

$$\exists u \in \mathcal{U}, \quad y(T; y_0, u) = y_f.$$

On appelle ensemble atteignable l'ensemble des points  $\mathcal{U}$ -atteignables.



Par la suite,  $\mathcal{U}_0$  sera convexe et compact,  $y_0 = 0$ , l'ensemble atteignable sera noté  $L_T \mathcal{U}$ .

Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t) \\ y(0) = 0 \in \mathbb{R}^2 \\ u(t) \in [-M, M] \quad \forall t \in [0, T], \end{cases}$$

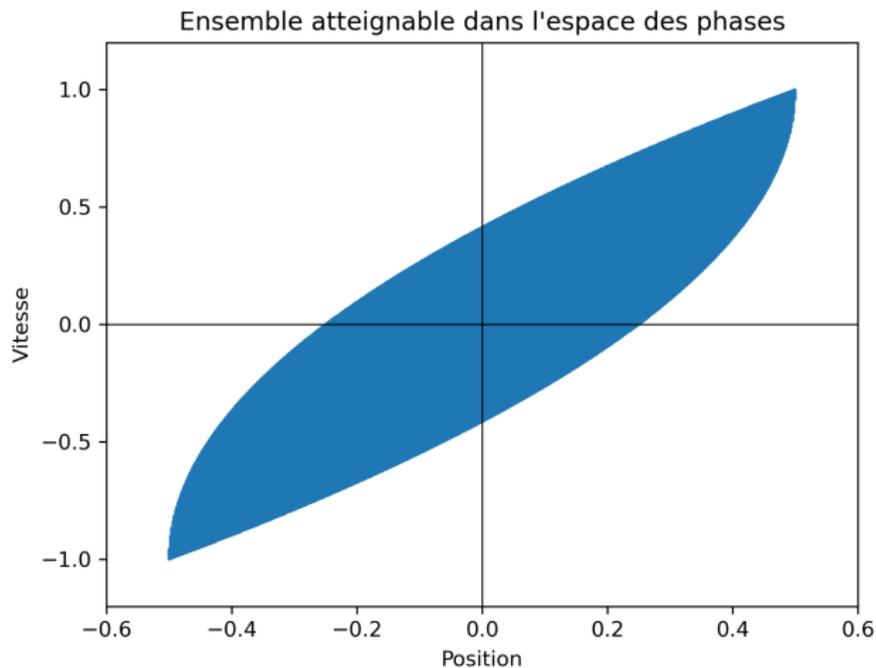
avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

# Atteignabilité

Exemple : le tram

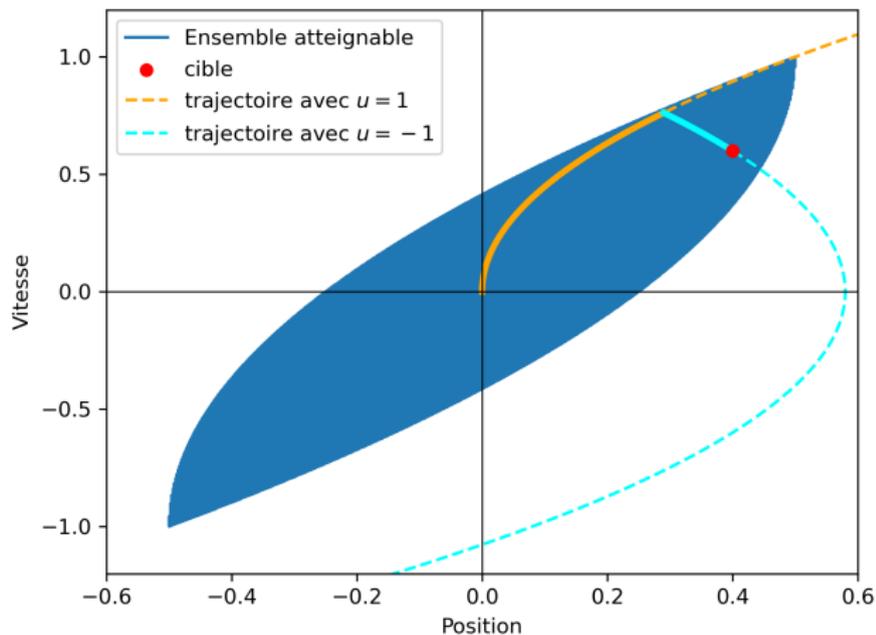
Pour ce système, avec  $T = M = 1$  :



# Atteignabilité

Exemple : le tram

Par exemple, la cible  $y_f = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.6 \end{pmatrix}$  est atteignable :



- 1 Théorie du contrôle
- 2 Non-atteignabilité : approche géométrique
- 3 Preuve assistée par ordinateur
  - Erreurs de discrétisation
  - Erreurs d'arrondis
  - Minimisation de  $J$
- 4 Résultats numériques
- 5 Conclusion

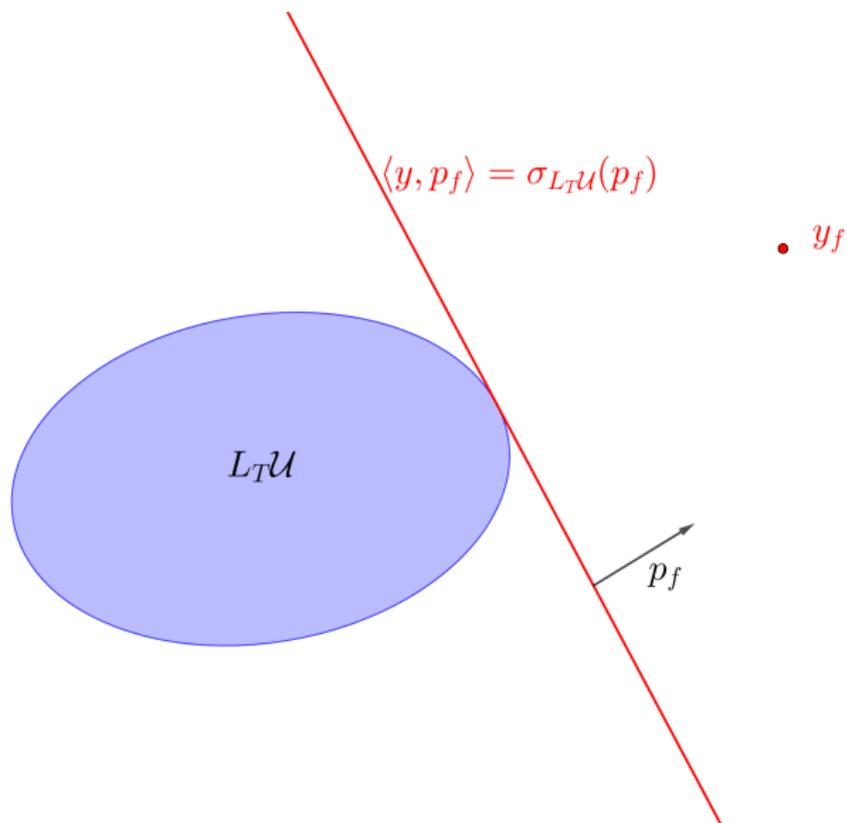
Pour  $A$  convexe, fermé et non-vide dans un espace de Hilbert  $H$ , on appelle fonction support :

$$\sigma_A : \begin{cases} H & \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ y & \mapsto \sup_{x \in A} \langle x, y \rangle. \end{cases}$$

En particulier :

$$\forall p_f \in \mathbb{R}^n, \quad \sigma_{L_T \mathcal{U}}(p_f) = \sigma_{\mathcal{U}}(L_T^* p_f).$$

# Fonction support



# Théorème de non-atteignabilité

On note :

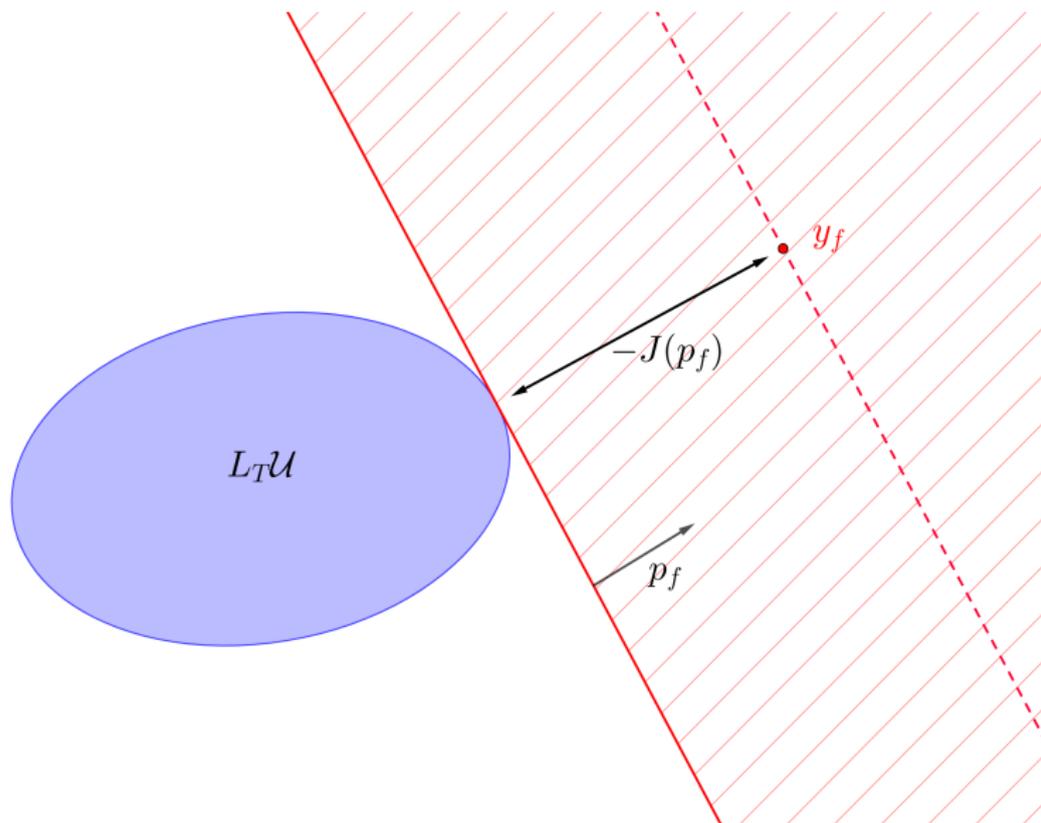
$$J : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \rightarrow \mathbb{R} \\ p_f & \mapsto \sigma_{\mathcal{U}}(L_T^* p_f) - \langle p_f, y_f \rangle. \end{cases}$$

## Théorème

*S'il existe  $p_f \in \mathbb{R}^n$  tel que  $J(p_f) < 0$ , alors  $y_f$  n'est pas  $\mathcal{U}$ -atteignable pour  $(S)$  en temps  $T$ .*

Ce résultat est également valable en dimension infinie.

# Théorème de non-atteignabilité



- 1 Théorie du contrôle
- 2 Non-atteignabilité : approche géométrique
- 3 Preuve assistée par ordinateur**
  - Erreurs de discrétisation
  - Erreurs d'arrondis
  - Minimisation de  $J$
- 4 Résultats numériques
- 5 Conclusion

## Théorème

*S'il existe  $p_f \in \mathbb{R}^n$  tel que  $J(p_f) < 0$ , alors  $y_f$  n'est pas  $\mathcal{U}$ -atteignable pour (S) en temps  $T$ .*

## Théorème

*S'il existe  $p_f \in \mathbb{R}^n$  tel que  $J(p_f) < 0$ , alors  $y_f$  n'est pas  $\mathcal{U}$ -atteignable pour (S) en temps  $T$ .*

Pour vérifier numériquement l'hypothèse  $J(p_f) < 0$ , il faut :

- 1 créer  $J_d \simeq J$  évaluable
- 2 trouver  $p_f$  tel que  $J_d(p_f) < 0$
- 3 vérifier que  $J(p_f) < 0$ .

## Théorème

*S'il existe  $p_f \in \mathbb{R}^n$  tel que  $J(p_f) < 0$ , alors  $y_f$  n'est pas  $\mathcal{U}$ -atteignable pour (S) en temps  $T$ .*

Pour vérifier numériquement l'hypothèse  $J(p_f) < 0$ , il faut :

- 1 créer  $J_d \simeq J$  évaluable
- 2 trouver  $p_f$  tel que  $J_d(p_f) < 0$
- 3 vérifier que  $J(p_f) < 0$ .

Pour vérifier que  $J(p_f) < 0$  à partir de  $J_d(p_f) < 0$ , il faut :

- borner les erreurs de discrétisation  $e_d(p_f)$
- borner les erreurs d'arrondis  $e_a(p_f)$ .

## Théorème

Soit  $J_d : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une discrétisation de  $J$ , et  $e_d : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  tels que

$$\forall p_f \in \mathbb{R}^n, \quad J_d(p_f) - e_d(p_f) < J(p_f) < J_d(p_f) + e_d(p_f),$$

et soit  $e_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  une majoration des erreurs d'arrondis commises lors du calcul de  $J_d$ .

Alors s'il existe  $p_f \in \mathbb{R}^n$  tel que  $J_d(p_f) + e_d(p_f) + e_a(p_f) < 0$ , alors  $y_f$  n'est pas  $\mathcal{U}$ -atteignable pour  $(S)$  en temps  $T$ .

Comme on suppose  $\mathcal{U}$  de la forme :

$$\mathcal{U} = \{u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m), \forall t \in [0, T], u(t) \in \mathcal{U}_0\},$$

et on suppose connaître explicitement  $\sigma_{\mathcal{U}_0}$ . Dans ce cas, il faut évaluer :

$$J : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \rightarrow \mathbb{R} \\ p_f & \mapsto \int_0^T \sigma_{\mathcal{U}_0}(B^* e^{(T-t)A^*} p_f) dt - \langle p_f, y_f \rangle, \end{cases}$$

autrement dit évaluer :

- une intégrale,  $\int_0^T \dots dt$
- une fonction,  $p : t \mapsto e^{(T-t)A^*} p_f$ .

# Discrétisation de la fonctionnelle

Comme on suppose  $\mathcal{U}$  de la forme :

$$\mathcal{U} = \{u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m), \forall t \in [0, T], u(t) \in \mathcal{U}_0\},$$

et on suppose connaître explicitement  $\sigma_{\mathcal{U}_0}$ . Dans ce cas, il faut évaluer :

$$J : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \rightarrow \mathbb{R} \\ p_f & \mapsto \int_0^T \sigma_{\mathcal{U}_0}(B^* e^{(T-t)A^*} p_f) dt - \langle p_f, y_f \rangle, \end{cases}$$

autrement dit évaluer :

- une intégrale,  $\int_0^T \dots dt \implies$  il faut discrétiser
- une fonction,  $p : t \mapsto e^{(T-t)A^*} p_f$ .

Comme on suppose  $\mathcal{U}$  de la forme :

$$\mathcal{U} = \{u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m), \forall t \in [0, T], u(t) \in \mathcal{U}_0\},$$

et on suppose connaître explicitement  $\sigma_{\mathcal{U}_0}$ . Dans ce cas, il faut évaluer :

$$J : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \rightarrow \mathbb{R} \\ p_f & \mapsto \int_0^T \sigma_{\mathcal{U}_0}(B^* e^{(T-t)A^*} p_f) dt - \langle p_f, y_f \rangle, \end{cases}$$

autrement dit évaluer :

- une intégrale,  $\int_0^T \dots dt \implies$  il faut discrétiser
- une fonction,  $p : t \mapsto e^{(T-t)A^*} p_f \implies$  deux cas étudiés.

# Evaluation de $J$

## Cas 1 : décomposition de Dunford

Si  $A = PDP^{-1} + N$ , avec  $P$  inversible,  $D$  diagonale,  $N$  nilpotente commutant avec  $PdP^{-1}$ , alors

$$\forall t \in [0, T], \quad e^{tA} p_f = P e^{tD} P^{-1} Q(tN) p_f,$$

avec  $Q(X) = \sum_{i=0}^d \frac{X^i}{i!}$ . En utilisant d'autre part la méthode des rectangles pour l'approximation de la valeur de l'intégrale, on obtient alors la majoration d'erreurs de discrétisation sur  $J$  :

### Théorème

Pour  $p_f \in \mathbb{R}^n$ ,

$$e_d(p_f) = |J(p_f) - J_d(p_f)| \leq \frac{1}{2} \Delta t MT \|B\| \|A^* p_f\| \kappa(P) e^{\mu T} Q(\|N\|T),$$

où  $\mu := \max(\operatorname{Re}(\lambda_i), i \in \{0, \dots, n\})$  est l'abscisse spectrale de  $A$ , et  $\kappa(P) = \|P\| \|P^{-1}\|$  le conditionnement de  $P$ .

# Evaluation de $J$

## Cas 2 : discrétisation de l'EDO adjointe

Si la décomposition de Dunford n'est pas connue, on suppose en plus que  $A$  est semi-définie *négative*. Dans ce cas, on discrétise l'EDO adjointe

$$\begin{cases} \dot{p}(t) + A^*p(t) = 0 & \forall t \in [0, T] \\ p(T) = p_f, \end{cases}$$

avec le schéma d'Euler implicite

$$\begin{cases} (\text{Id} - \Delta t A^*)p_n = p_{n+1} & \forall n \in \{0, \dots, N_t\} \\ p_{N_t} = p_f. \end{cases}$$

# Evaluation de $J$

## Cas 2 : discrétisation de l'EDO adjointe

On obtient donc  $\forall n \in \{0, \dots, N_t\}$ ,

$$p(n\Delta t) = e^{(T-n\Delta t)A^*} p_f \simeq (\text{Id} - \Delta t A^*)^{-(N_t-n)} = p_n,$$

et la majoration de l'erreur :

### Théorème

$\forall n \in \llbracket 0, N_t \rrbracket$ ,

$$\|p(t_n) - p_n\| \leq \frac{1}{2} \Delta t \|A^* p_f\|.$$

# Evaluation de $J$

## Cas 2 : discrétisation de l'EDO adjointe

En combinant les erreurs de discrétisation de l'intégrale via la méthode des rectangles et de l'EDO adjointe, on obtient finalement :

### Théorème

$$\forall p_f \in \mathbb{R}^n$$

$$e_d(p_f) = \|J(p_f) - J_d(p_f)\| \leq \Delta t \|A^* p_f\| \left( TM \|B\| + \frac{1}{2} \|y_0\| \right).$$

# Erreurs d'arrondis

## Arithmétique d'intervalles

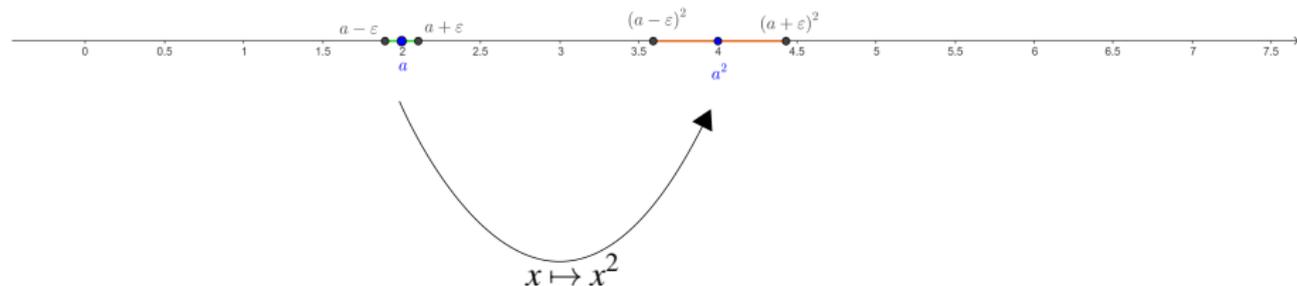
Pour gérer les erreurs d'arrondis effectuées par l'ordinateur, il faut considérer la potentielle erreur et en tenir compte à chaque calcul :



# Erreurs d'arrondis

## Arithmétique d'intervalles

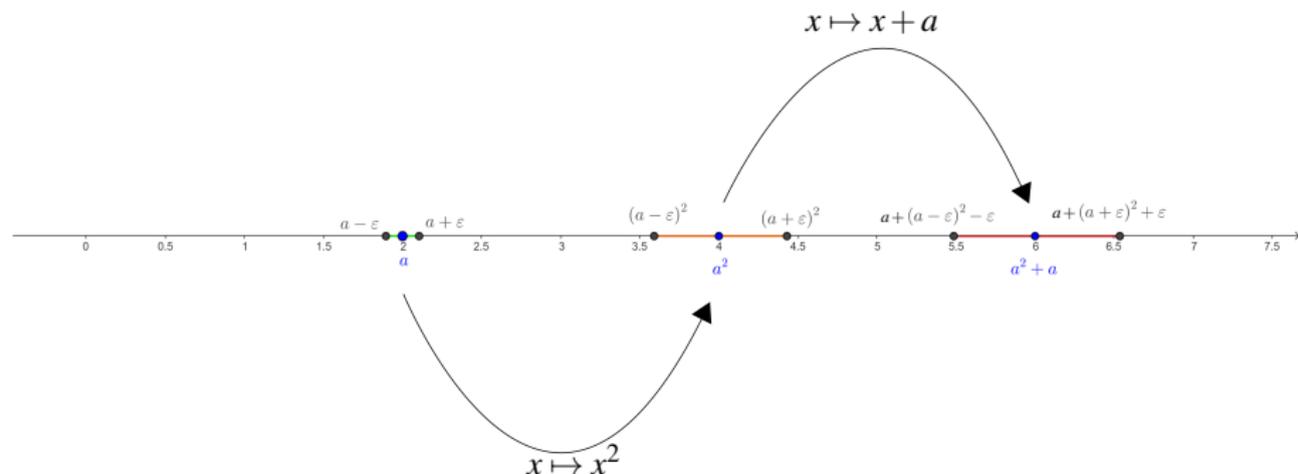
Pour gérer les erreurs d'arrondis effectuées par l'ordinateur, il faut considérer la potentielle erreur et en tenir compte à chaque calcul :



# Erreurs d'arrondis

## Arithmétique d'intervalles

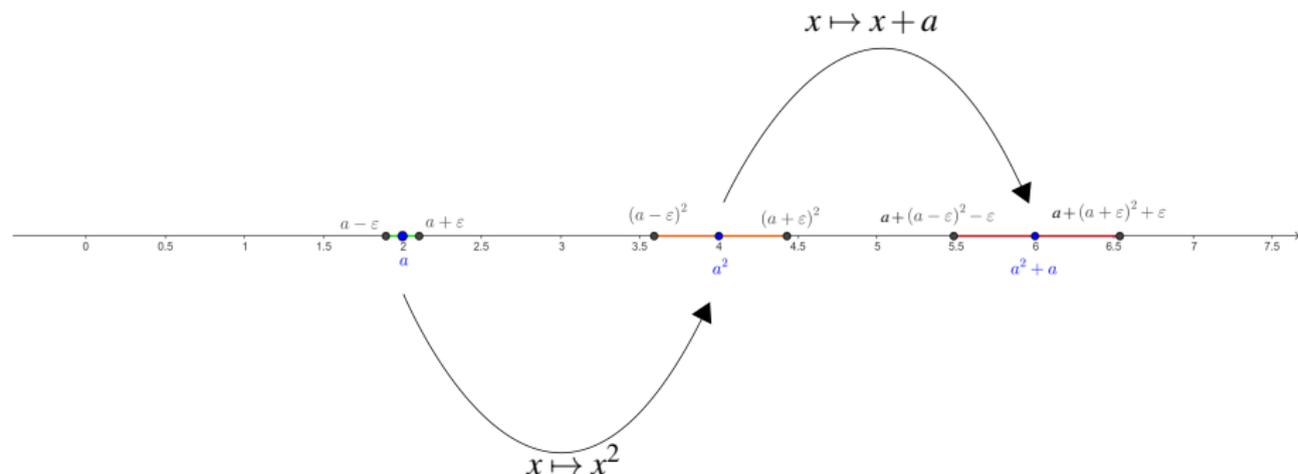
Pour gérer les erreurs d'arrondis effectuées par l'ordinateur, il faut considérer la potentielle erreur et en tenir compte à chaque calcul :



# Erreurs d'arrondis

## Arithmétique d'intervalles

Pour gérer les erreurs d'arrondis effectuées par l'ordinateur, il faut considérer la potentielle erreur et en tenir compte à chaque calcul :



En pratique, le package Intlab (sur Matlab) de Siegfried M. Rump s'en charge parfaitement.

## Théorème

Soit :

- $J_d : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une discrétisation de  $J$
- $e_d : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  l'erreur totale de discrétisation
- $e_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  l'erreur totale d'arrondis lors du calcul de  $J_d$ .

On a alors :

$$\forall p_f \in \mathbb{R}^n, \quad J_d(p_f) - e_d(p_f) - e_a(p_f) < J(p_f) < J_d(p_f) + e_d(p_f) + e_a(p_f),$$

et s'il existe  $p_f \in \mathbb{R}^n$  tel que  $J_d(p_f) + e_d(p_f) + e_a(p_f) < 0$ , alors  $y_f$  n'est pas  $\mathcal{U}$ -atteignable pour  $(S)$  en temps  $T$ .

Pour montrer numériquement la non-atteignabilité de  $y_f$ , on doit donc :

- ① créer  $J_d \simeq J$  évaluable  $\implies$  discrétisation totale ou partielle
- ② trouver  $p_f$  tel que  $J_d(p_f) < 0 \implies$  *minimisation* de  $J_d$
- ③ vérifier que  $J(p_f) < 0 \implies$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{contrôle d'erreurs de discrétisation} \\ \text{arithmétique d'intervalles} \end{array} \right.$

On rappelle le problème de contrôle originel : trouver  $u \in \mathcal{U}$  tel que  $y(T) = y_f$ , avec

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t) & \forall t \in [0, T] \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Ce problème se reformule sous la forme :

$$\inf_{u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)} \delta_{\mathcal{U}}(u) + \delta_{\{y_f\}}(y(T)) < +\infty,$$

où, pour  $C$  un ensemble convexe fermé non-vide :

$$\delta_C(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in C \\ +\infty & \text{si } x \notin C. \end{cases}$$

En calculant le problème dual au sens de Fenchel, on retombe sur

$$\inf_{p_f \in \mathbb{R}^n} J(p_f) > -\infty,$$

avec de plus, sous des hypothèses assez faibles :

$$\inf_{u \in L^2(0,T;\mathbb{R}^m)} \delta_U(u) + \delta_{\{y_f\}}(LTu) = - \inf_{p_f \in \mathbb{R}^n} J(p_f).$$

Cette structure primal-dual permet l'utilisation d'algorithmes efficaces pour la recherche de minimiseurs. Par exemple, l'algorithme de Chambolle-Pock.

- 1 Théorie du contrôle
- 2 Non-atteignabilité : approche géométrique
- 3 Preuve assistée par ordinateur
  - Erreurs de discrétisation
  - Erreurs d'arrondis
  - Minimisation de  $J$
- 4 Résultats numériques
- 5 Conclusion

## Théorème

Pour  $y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $M = 1$ ,  $T = 1$ ,  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , pour le système contrôlé

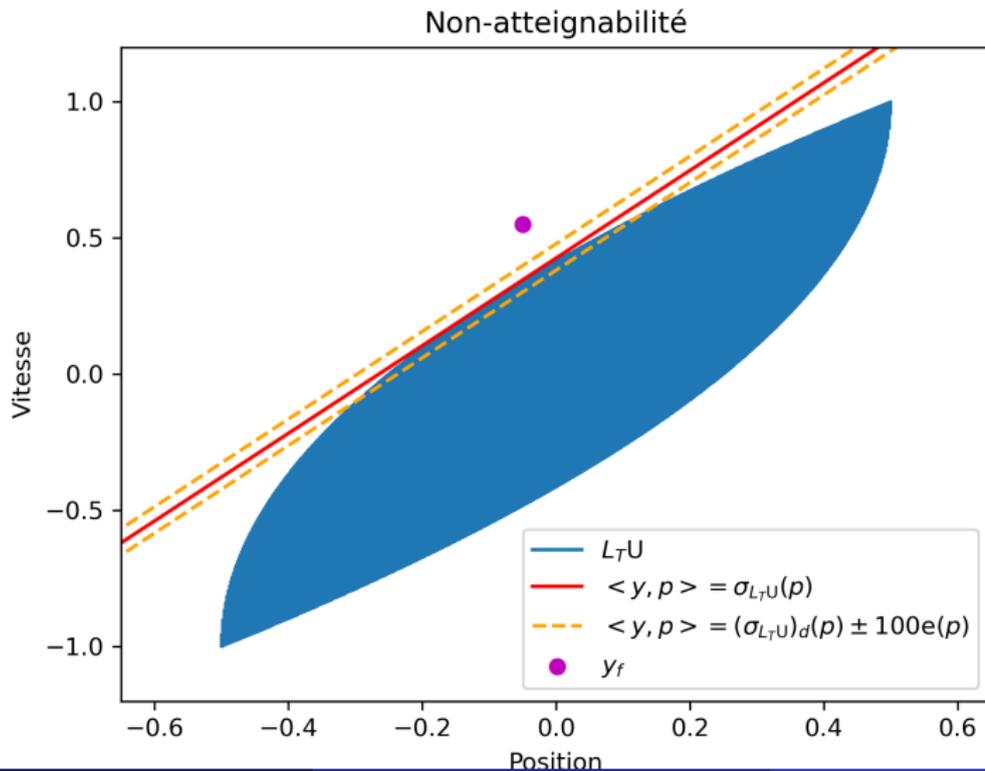
$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t) & \forall t \in [0, T] \\ y(0) = y_0 \\ u(t) \in [-M, M] & \forall t \in [0, T], \end{cases}$$

le point  $y_f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}$  n'est pas atteignable. En effet, pour  $p_f = \begin{pmatrix} -0.8 \\ 0.6 \end{pmatrix}$ , on a

$$J(p_f; y_f) \in [-0.0513, -0.0483].$$

# Non-atteignabilité d'une cible

Tram



Prenons l'exemple suivant, linéarisation d'un système d'équations modélisant le déplacement d'une station spatiale en orbite terrestre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t) \quad \forall t \in [0, T] \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^4 \\ u(t) \in \mathbb{R}^2 \\ \|u(t)\|_2 \leq 1.15 \quad \forall t \in [0, T] \\ \|u(t)\|_\infty \leq 1, \end{array} \right.$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

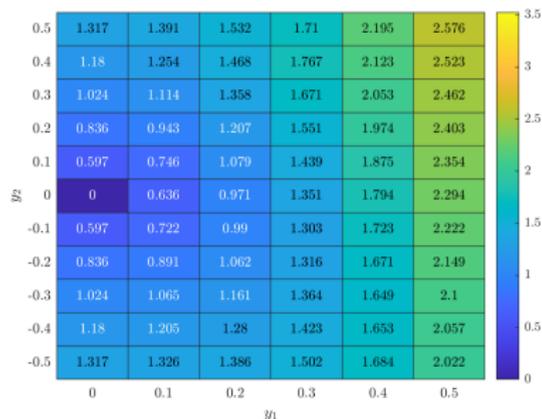
# Approximation garantie de temps minimal

Dans certains cas, il existe un temps minimal d'atteignabilité  $T^*$  : à cible  $y_f$  fixée,  $\forall T > T^*, \exists u \in \mathcal{U}, y(T; u) = y_f$  et  $\forall T < T^*, \forall u \in \mathcal{U}, y(T; u) \neq y_f$ .

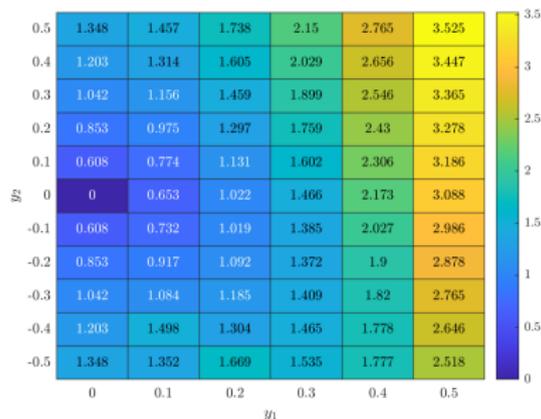
Dans ce cadre là, prouver que  $y_f$  est non-atteignable en temps  $t_f > 0$  implique que  $T^* > t_f$ . On peut donc garantir une borne inférieure sur le temps minimal d'atteignabilité.

# Rendez-vous spatial

## Approximation garantie de temps minimal



Borne inférieure certifiée des temps minimaux



Approximation non certifiée des temps minimaux

# Non-atteignabilité de zone dangereuse

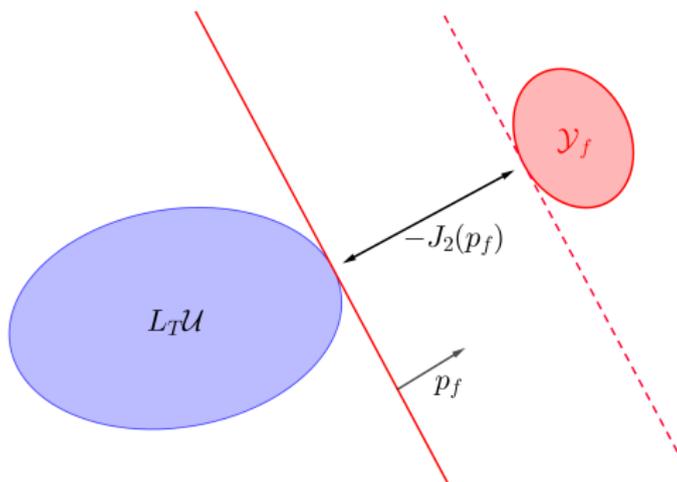
On peut appliquer la même méthode pour montrer la non-atteignabilité en temps  $T$  d'une zone entière  $\mathcal{Y}_f$  de l'espace avec une nouvelle fonctionnelle :

$$J_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ p_f \mapsto \sigma_{\mathcal{U}}(L_T^* p_f) + \sigma_{\mathcal{Y}_f}(-p_f) \end{cases}$$

# Non-atteignabilité de zone dangereuse

On peut appliquer la même méthode pour montrer la non-atteignabilité en temps  $T$  d'une zone entière  $\mathcal{Y}_f$  de l'espace avec une nouvelle fonctionnelle :

$$J_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ p_f \mapsto \sigma_{\mathcal{U}}(L_T^* p_f) + \sigma_{\mathcal{Y}_f}(-p_f) \end{cases}$$



On peut appliquer la même méthode pour montrer la non-atteignabilité en temps  $T$  d'une zone entière  $\mathcal{Y}_f$  de l'espace avec une nouvelle fonctionnelle :

$$J_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ p_f \mapsto \sigma_{\mathcal{U}}(L_T^* p_f) + \sigma_{\mathcal{Y}_f}(-p_f) \end{cases}$$

## Theorem

$\mathcal{Y}_f = \{x \in \mathbb{R}^4, \|(x_1, x_2)\|_2 \leq 0.1, x_3 = x_4 = 0\}$  n'est pas atteignable en temps  $T = 1$ . En effet,

$$J_2 \left( \begin{pmatrix} 0.62 \\ 0.78 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \in [-0.1146, -0.0717].$$

- 1 Théorie du contrôle
- 2 Non-atteignabilité : approche géométrique
- 3 Preuve assistée par ordinateur
  - Erreurs de discrétisation
  - Erreurs d'arrondis
  - Minimisation de  $J$
- 4 Résultats numériques
- 5 Conclusion

- Contributions :
  - Méthode générale assistée par ordinateur pour la preuve de non-atteignabilité de systèmes de contrôle linéaires
  - Estimées fines d'erreurs de discrétisation avec constantes explicites
- Perspectives :
  - Extension à la dimension infinie (en cours pour l'équation de la chaleur avec conditions Dirichlet nulles au bord)
  - Approximations externes et internes certifiées de l'ensemble atteignable

Merci pour votre attention !