Méthodes assistées par ordinateur pour la description rigoureuse d'ensembles atteignables de problèmes linéaires contraints

Ivan Hasenohr

Doctorat sous la direction de Camille Pouchol, Yannick Privat et Christophe Zhang

Université Paris Cité

ANR TRECOS

Sommaire

Sommaire

Pour $u \in L^2(0,T;\mathbb{R}^m)$, on considère le système contrôlé linéaire en dimension finie suivant :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t) \quad \forall t \in [0,T] \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{S}$$

On note la solution de (S) au temps T ainsi :

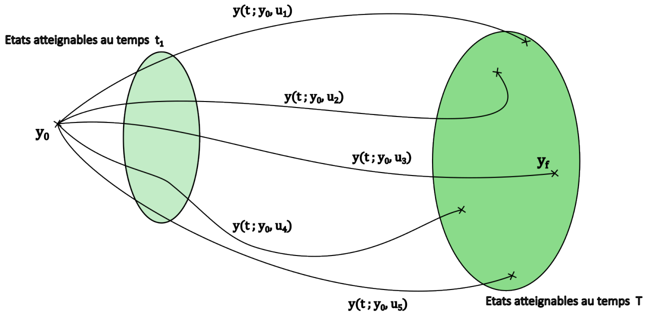
$$y(T;y_0,u) = S_T y_0 + L_T u,$$

où $(S_t)_{t\in[0,T]}$ est le semi-groupe engendré par A, et

$$L_T : u \mapsto \int_0^T S_{T-t}Bu(t)\,\mathrm{d}t.$$

Soit $y_f \in \mathbb{R}^n$, soit $\mathcal{U} \subset L^2(0,T,\mathbb{R}^m)$. On dit que y_f est $\mathcal{U}$-atteignable p our (S) de y_0 en temps T si :

$$\exists u \in \mathcal{U}, \quad y(T;y_0,u) = y_f (\Longleftrightarrow \exists u \in \mathcal{U}, \quad L_T u = y_f - S_T y_0).$$



Par la suite, $\mathcal{U}$ sera supposé convexe et compact.

Contrôlabilité sous contraintes :

- Sylvain Ervedoza, *Control issues and linear projection constraints on the control and on the controlled trajectory*

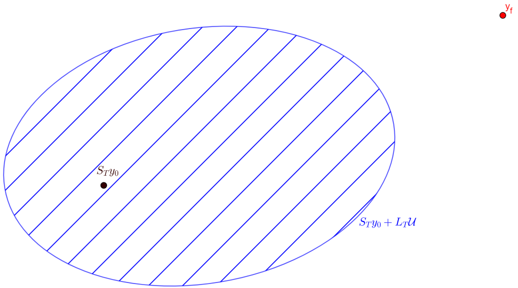
Contrôlabilité via la dualité de Fenchel :

- J.L. Lions *Remarks on approximate controllability*
- E.Trélat, G. Wang, Y. Xu, *Characterization by observability inequalities of controllability and stabilization properties*
- C. Pouchol, E. Trélat, C. Zhang, *Approximate control of parabolic equations with on-off shape controls by Fenchel duality*
- R.Baier, C. Büskens, I. A. Chahma, M. Gerdts, *Approximation of reachable sets by direct solution methods for optimal control problems*

Sommaire

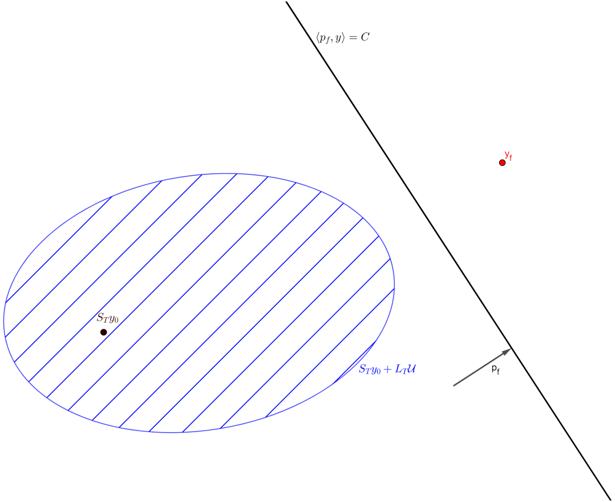
Non-atteignabilité

Approche géométrique



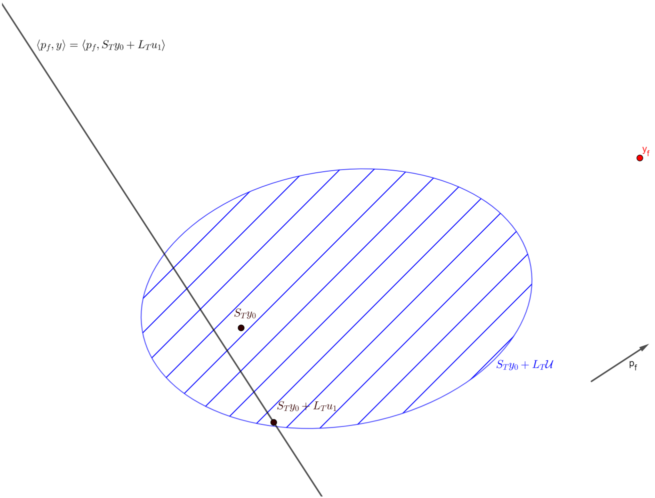
Non-atteignabilité

Approche géométrique



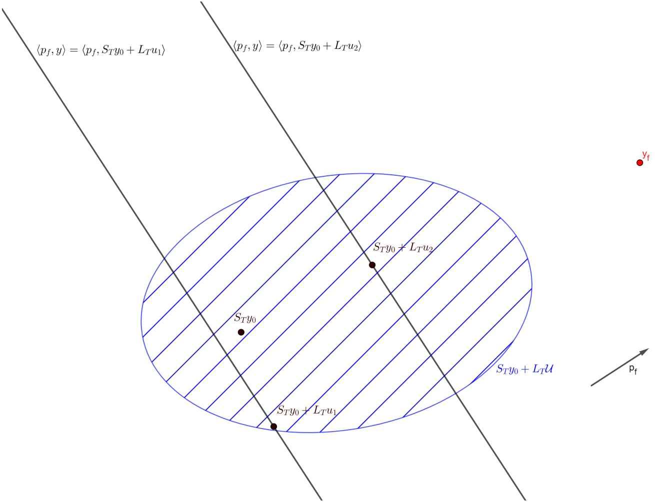
Non-atteignabilité

Approche géométrique



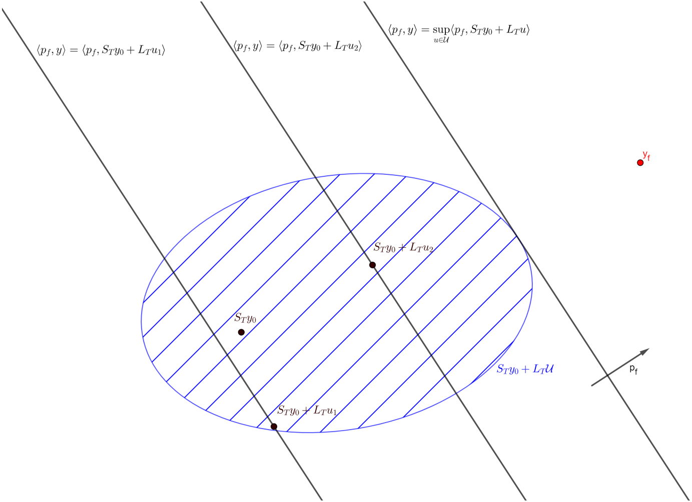
Non-atteignabilité

Approche géométrique



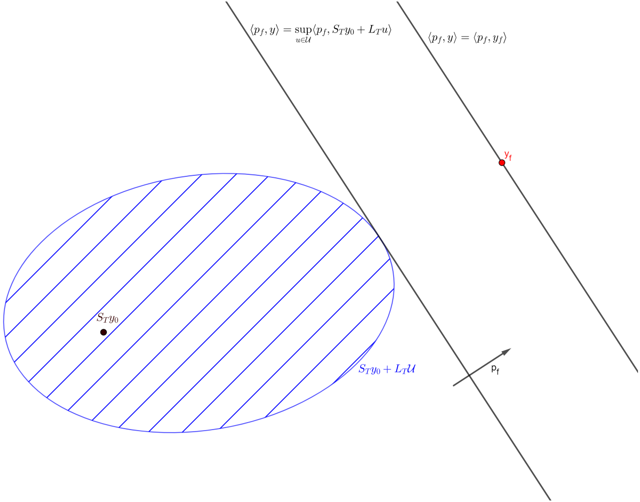
Non-atteignabilité

Approche géométrique



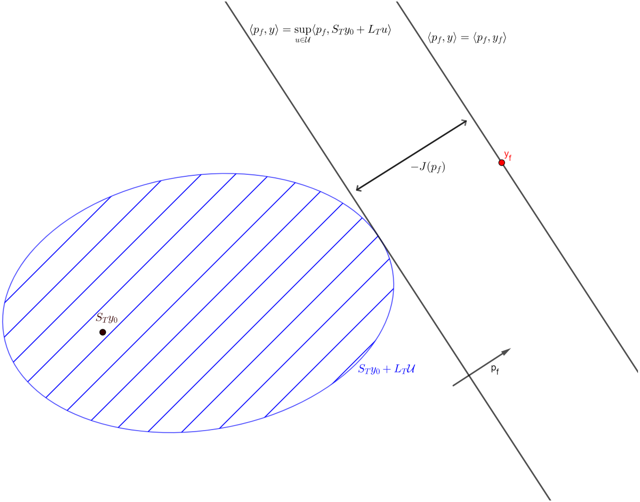
Non-atteignabilité

Approche géométrique



Non-atteignabilité

Approche géométrique



Pour $p_f \in \mathbb{R}^n$:

$$\sup_{u \in \mathcal{U}} \langle p_f, S_T y_0 + L_T u \rangle = \langle p_f, S_T y_0 \rangle + \sup_{u \in \mathcal{U}} \langle L_T^* p_f, u \rangle.$$

On appelle fonction support de $\mathcal{U}$ et on note :

$$\sigma_{\mathcal{U}} : \begin{cases} L^2(0, T, \mathbb{R}^m) & \to \mathbb{R} \\ v & \mapsto \sup_{u \in \mathcal{U}} \langle v, u \rangle, \end{cases}$$

Alors :

$$\sup_{u \in \mathcal{U}} \langle p_f, S_T y_0 + L_T u \rangle = \sigma_{\mathcal{U}}(L_T^* p_f) + \langle p_f, S_T y_0 \rangle.$$

On note :

$$J : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \to \mathbb{R} \\ p_f & \mapsto \sigma_{\mathcal{U}}(L_T^* p_f) + \langle p_f, S_T y_0 - y_f \rangle. \end{cases}$$

Théorème

S'il existe $p_f \in \mathbb{R}^n$ tel que $J(p_f) < 0$, alors y_f n'est pas $\mathcal{U}$-atteignable pour (S) en temps T.

Remarque

Ce résultat est extensible à la dimension infinie.

Pour prouver numériquement qu'un état y_f n'est pas $\mathcal{U}$-atteignable pour (S) à partir de y_0 en temps T, on utilise la méthode suivante :

1. Calcul explicite de $\sigma_{\mathcal{U}}$ (possible pour de nombreux ensembles $\mathcal{U}$ simples)
2. discrétisation de la fonctionnelle J
3. minimisation de la fonctionnelle discrétisée $J_{\Delta t}$, pour trouver $p_f \in \mathbb{R}^n$ tel que $J_{\Delta t}(p_f) < 0$
4. majoration théorique des différentes erreurs commises
5. en prenant en compte les erreurs commises, vérification de $J(p_f) < 0$.

On se focalise sur le cas où :

$$\mathcal{U} = \{u \in L^2(0,T;\mathbb{R}^m), \text{p.p.} t \in [0,T], u(t) \in \mathcal{U}_0\},$$

avec $\mathcal{U}_0 \subset B(0,M) \subset \mathbb{R}^m$, $M > 0$ étant fixé. Dans ce cas là, on a, $\forall u \in \mathcal{U}$:

$$\sigma_{\mathcal{U}}(u) = \int_0^T \sigma_{\mathcal{U}_0}(u(t))\,\mathrm{d}t.$$

J est alors discrétisée, par le schéma d'Euler implicite, en :

$$J_{\Delta t} : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \to \mathbb{R} \\ p_f & \mapsto \Delta t \displaystyle\sum_{i=0}^{N_t-1} \sigma_{\mathcal{U}_0}(BS^*_{t_{N_t-i-1},\Delta t}\, p_f) + \langle p_f, S_{T,\Delta t}\, y_0 - y_f \rangle. \end{cases}$$

On minimise la discrétisation de la fonctionnelle fortement convexe :

$$\widetilde{J} : p_f \mapsto J(p_f) + \frac{1}{2}\|p_f\|^2,$$

De plus,

$$\exists\, p_f \in \mathbb{R}^n,\ \widetilde{J}(p_f) < 0 \Longleftrightarrow \exists\, p_f \in \mathbb{R}^n,\ J(p_f) < 0.$$

En notant, pour C un ensemble convexe fermé non vide,

$$\delta_C(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in C \\ +\infty \text{ si } x \notin C, \end{cases}$$

on a :

$$\inf_{u \in L^2(0,T;\mathbb{R}^m)} \delta_{\mathcal{U}}(u) + \delta_{\{y_f\}}(y(T;y_0,u)) \geq - \inf_{p_f \in \mathbb{R}^n} J(p_f),$$

$$\inf_{u \in L^2(0,T;\mathbb{R}^m)} \delta_{\mathcal{U}}(u) + \frac{1}{2}\|y(T;y_0,u) - y_f\|^2 = - \inf_{p_f \in \mathbb{R}^n} \widetilde{J}(p_f).$$

De ces relations on déduit :

$$\exists p_f \in \mathbb{R}^n,\ \widetilde{J}(p_f) < 0 \Longleftrightarrow \exists u \in \mathcal{U},\ y(T;y_0,u) = y_f \Longleftrightarrow \exists p_f \in \mathbb{R}^n,\ J(p_f) < 0$$

Deux types d'erreurs sont à prendre en compte :

- $e_1 > 0$: les erreurs de discrétisation d'EDO et d'intégration
- $e_2 > 0$: les erreurs d'arrondis commises par l'ordinateur.

Au final :

$$J(p_f) \in \left[J_{\Delta t}(p_f) - e_1 - e_2,\ J_{\Delta t}(p_f) + e_1 + e_2\right],$$

et en particulier :

$$J_{\Delta t}(p_f) + e_1 + e_2 < 0 \implies J(p_f) < 0.$$

Théorème

Considérons l'EDO suivante :

$$\begin{cases} \dot{p}(t) = A^* p(t) & \forall t \in [0,T] \\ p(0) = p_f, \end{cases}$$

et notons $(p_n)_{n \in [\![0,N_t]\!]}$ *l'approximation de sa solution par le schéma d'Euler implicite. Supposons* $-A^*$ *m*α*-accrétif, avec* $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$*. Alors* $\forall n \in [\![0,N_t]\!]$,

$$\|p(t_n) - p_n\| \leq \Delta t \ \min\left(\frac{C}{\cos(\alpha)}\|A^* p_f\|, \frac{1}{2} t_n \|(A^*)^2 p_f\|\right),$$

où $C \leq 1 + \sqrt{2}$*.*

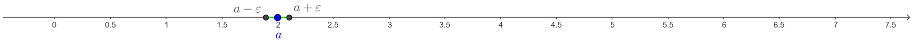
Théorème

Sous les hypothèses précédentes, $\forall p_f \in \mathbb{R}^n$ *:*

$$\left|J(p_f) - J_{\Delta t}(p_f)\right| \leq \Delta t \, M \|B\| \left(\frac{1}{2} T \|A\| \|p_f\| + \sum_{n=0}^{N_t - 1} \|p(t_n) - p_n\| \right) + \|y_0\| \|p(T) - p_{N_t}\|.$$

En particulier : $\left|J(p_f) - J_{\Delta t}(p_f)\right| = O(\Delta t)$.

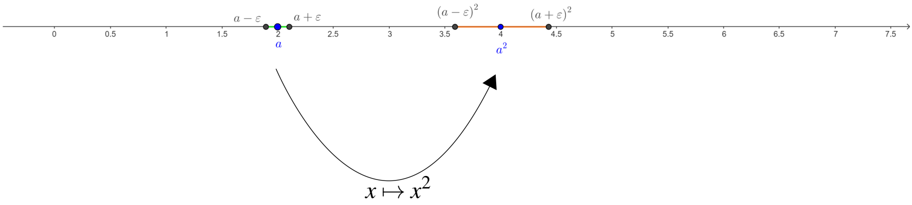
Pour gérer les erreurs d'arrondis effectuées par l'ordinateur, il faut considérer la potentielle erreur et en tenir compte à chaque calcul :



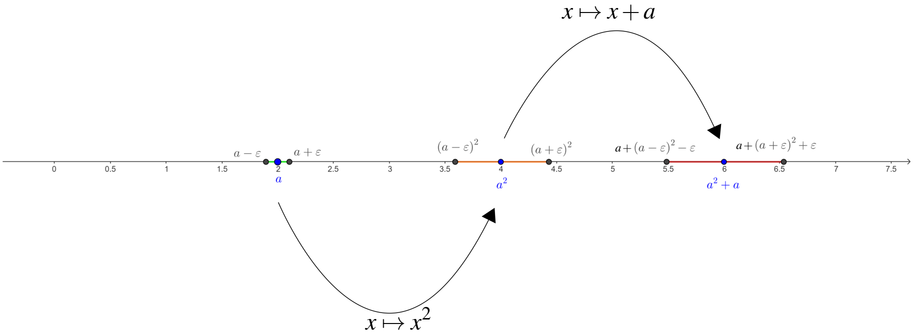
Non-atteignabilité

Arithmétique d'intervalles

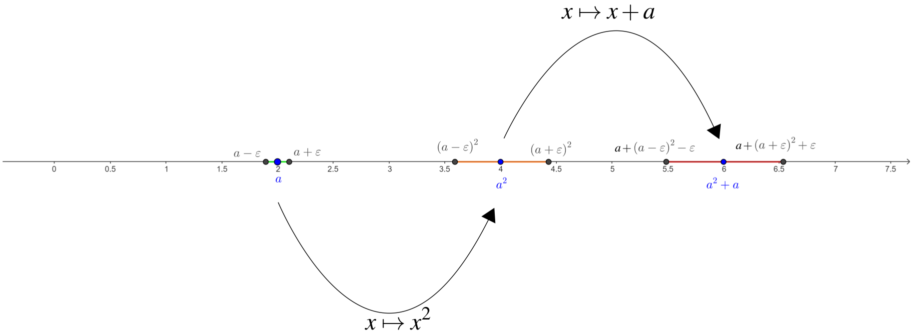
Pour gérer les erreurs d'arrondis effectuées par l'ordinateur, il faut considérer la potentielle erreur et en tenir compte à chaque calcul :



Pour gérer les erreurs d'arrondis effectuées par l'ordinateur, il faut considérer la potentielle erreur et en tenir compte à chaque calcul :



Pour gérer les erreurs d'arrondis effectuées par l'ordinateur, il faut considérer la potentielle erreur et en tenir compte à chaque calcul :

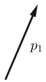


Le package Intlab, développé sur Matlab par Siegfried M. Rump, s'en charge numériquement très efficacement.

Sommaire

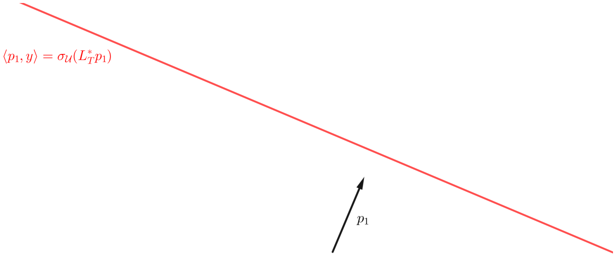
Atteignabilité assistée par ordinateur

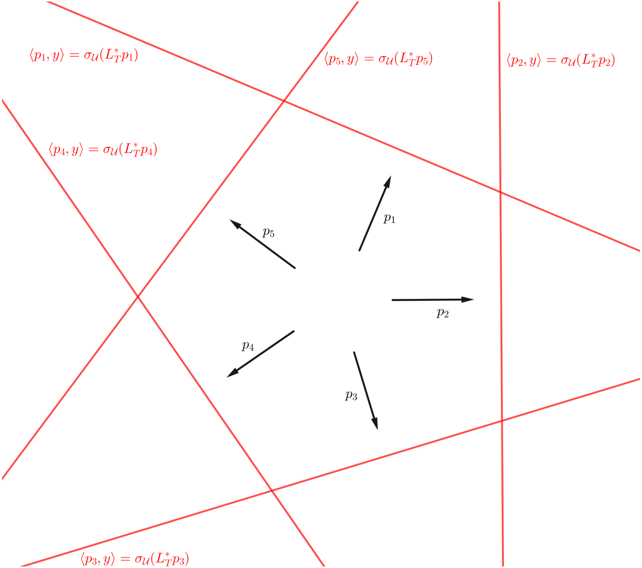
Approche géométrique



Atteignabilité assistée par ordinateur

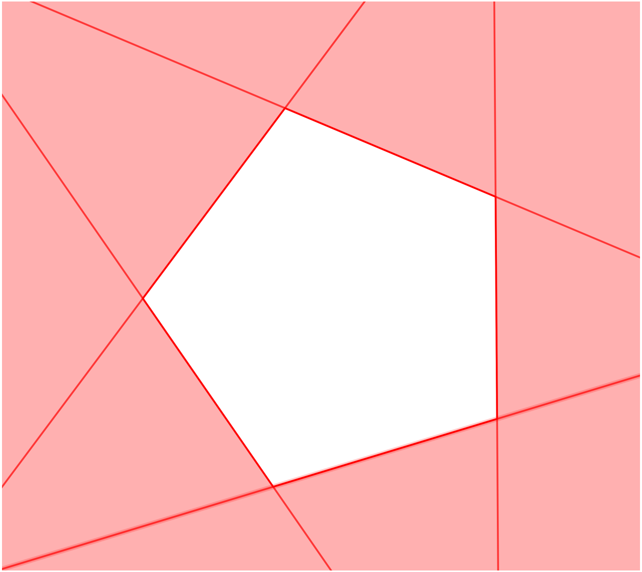
Approche géométrique




$\langle p_1, y\rangle = \sigma_{\mathcal{U}}(L_T^* p_1)$
$\langle p_5, y\rangle = \sigma_{\mathcal{U}}(L_T^* p_5)$
$\langle p_2, y\rangle = \sigma_{\mathcal{U}}(L_T^* p_2)$
$\langle p_4, y\rangle = \sigma_{\mathcal{U}}(L_T^* p_4)$
p_1
p_5
p_2
p_4
p_3
$\langle p_3, y\rangle = \sigma_{\mathcal{U}}(L_T^* p_3)$

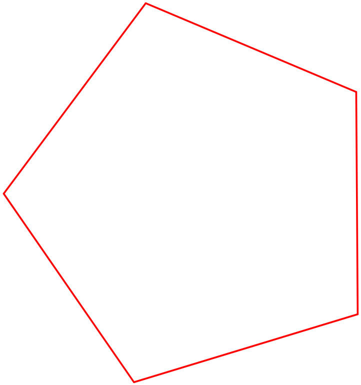
Atteignabilité assistée par ordinateur

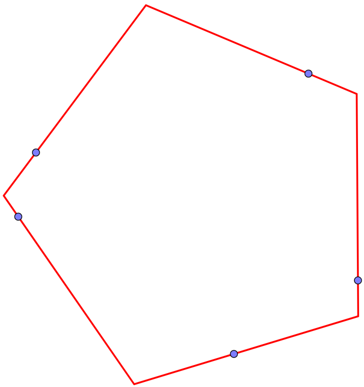
Approche géométrique



Atteignabilité assistée par ordinateur

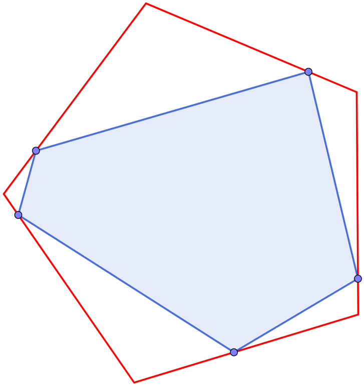
Approche géométrique

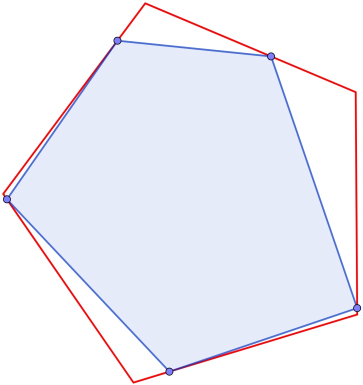


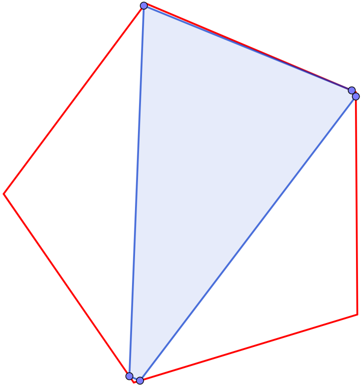


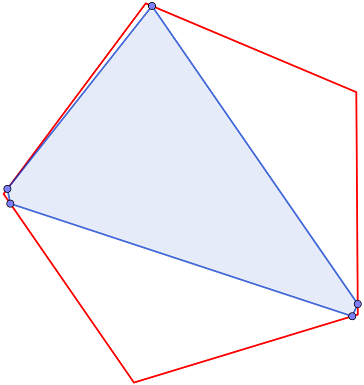
Atteignabilité assistée par ordinateur

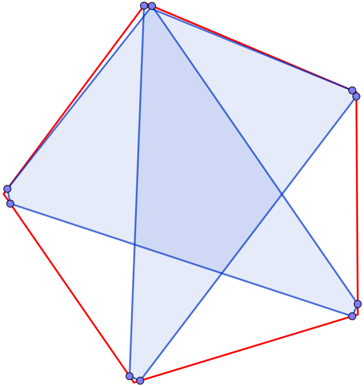
Approche géométrique

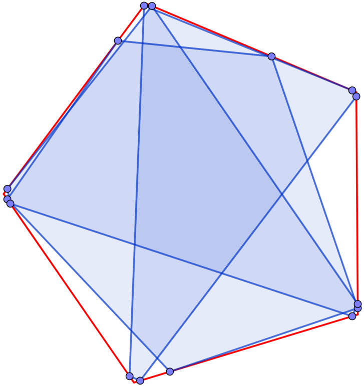


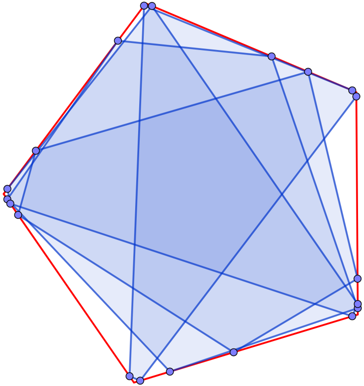






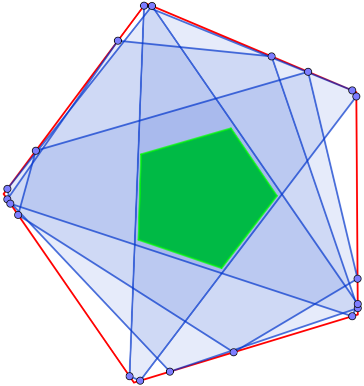


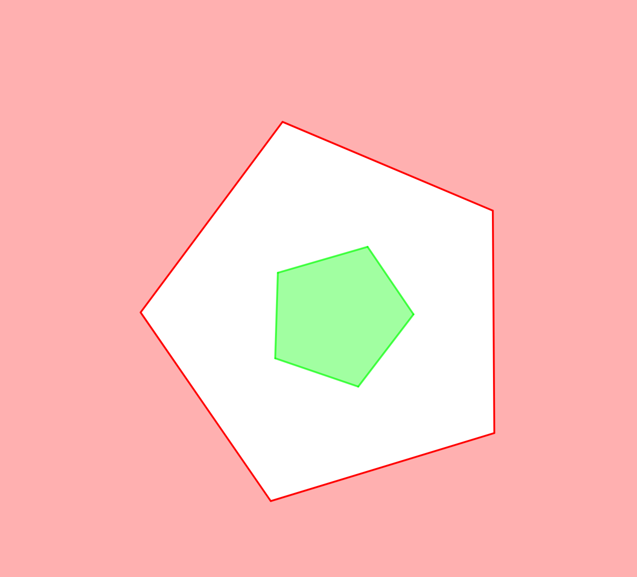




Atteignabilité assistée par ordinateur

Approche géométrique





Dans les slides suivants, on étudie l'atteignabilité du système suivant :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t) & \forall t \in [0,T] \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathcal{U} = \left\{ u \in L^2(0,T;\mathbb{R}), \forall t \in [0,T], u(t) \in [-1,1] \right\}.$$

Dans ce cas, on a :

$$\sigma_{\mathcal{U}} : u \mapsto M \int_0^T \|u(t)\| \,\mathrm{d}t.$$

Pour ce système, on peut d'autre part déterminer explicitement les états atteignables, ce qui nous permet d'évaluer le fonctionnement de nos méthodes numériques.

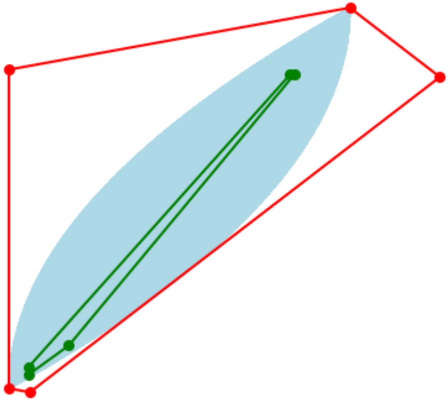


Figure – Approximation de l'ensemble atteignable avec 5 directions de p_f

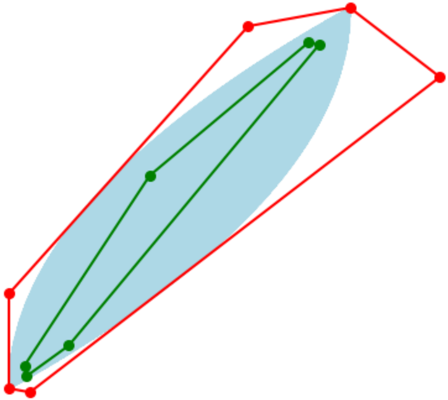


Figure – Approximation de l'ensemble atteignable avec 6 directions de p_f

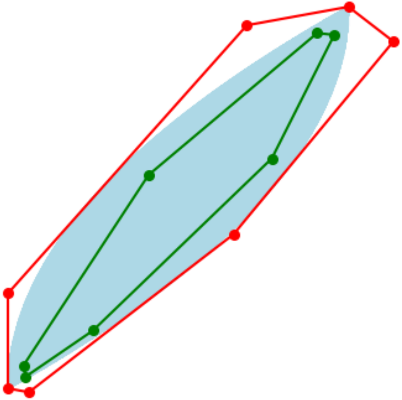


Figure – Approximation de l'ensemble atteignable avec 7 directions de p_f

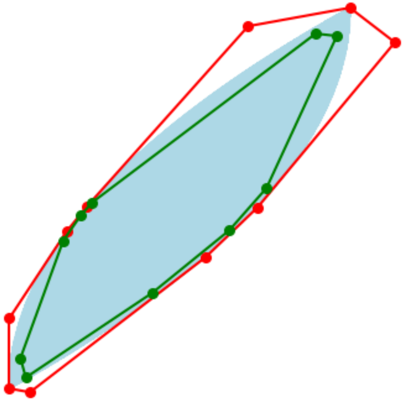


Figure – Approximation de l'ensemble atteignable avec 10 directions de p_f

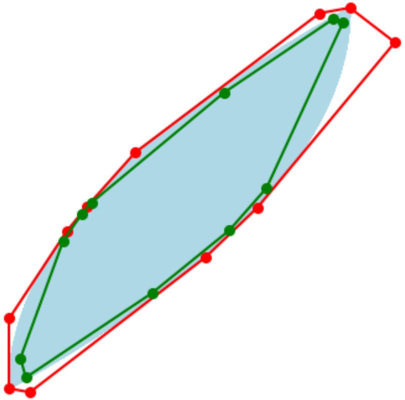


Figure – Approximation de l'ensemble atteignable avec 11 directions de p_f

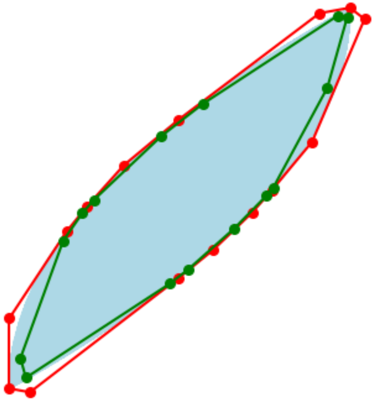


Figure – Approximation de l'ensemble atteignable avec 15 directions de p_f

Atteignabilité assistée par ordinateur

Exemple numérique

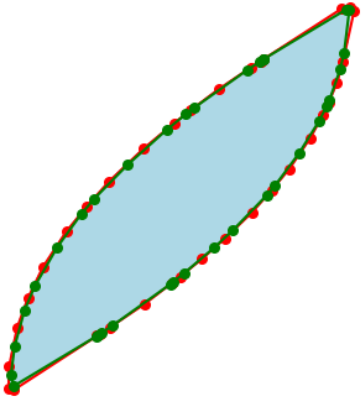


Figure – Approximation de l'ensemble atteignable avec 35 directions de p_f

Sommaire

Conclusion

- Non-atteignabilité :
  - minimisation d'une fonctionnelle convexe pour prouver numériquement la non-atteignabilité d'un état
  - potentiellement extensible à la dimension infinie
  - article en cours de rédaction
- Atteignabilité :
  - détermination d'une approximation rigoureuse de l'ensemble atteignable par des polygones intérieurs et extérieurs
  - non-extensible à la dimension infinie