

Delabie Seme 2023

Nicolas BEUVIN Ivan HASENOHR Chabane MEZIANE Étienne PEILLON

8 juin 2023

Table des matières

1	Introduction	1
2	Démarche	2
2.1	Écoulement d'eau	3
2.1.1	Tension de surface	3
2.1.2	Loi de Laplace-Young dans un capillaire	4
2.1.3	Loi de Laplace-Young cylindrique	5
2.2	Écoulement d'air	5
2.2.1	Écoulement de Poiseuille dans un capillaire	5
2.2.2	Écoulement de Poiseuille cylindrique	7
2.2.3	Écoulement laminaire et écoulement incompressible	7
2.3	Simulations numériques	8
2.3.1	Cas de l'écoulement d'air	8
2.3.2	Cas de l'écoulement d'eau	10
3	Conclusion	11
3.1	Hypothèses effectuées	11
3.2	Résultats obtenus	12
3.3	Perspectives	12

1 Introduction

L'entreprise DELABIE est une entreprise spécialisée dans la fabrication de robinetterie destinée aux lieux publics et aux hôpitaux. À l'issue de la fabrication des différentes pièces de robinetterie, un test est effectué pour déterminer la présence potentielle de défauts dans la pièce, pouvant occasionner des fuites. Ces tests sont pour l'heure principalement effectués via une injection d'eau dans la pièce, et une mesure de la pression du liquide à l'intérieur de la chambre à intervalles de temps réguliers, permettant de détecter la présence ou absence de fuite. Toutefois, ces tests en eau présentent plusieurs inconvénients majeurs :

- ils sont difficiles à mettre en place, et coûteux
- ils nécessitent l'apport d'eau sur le lieu de test, et peuvent occasionner d'importants dégâts en cas de fuite
- ils demandent une phase de séchage de la pièce, qui se révèle souvent ardue, voire impossible : la présence d'eau stagnante dans des pièces de robinetterie peut occasionner la prolifération de bactéries, ce qui est inenvisageable dans le cas de robinetterie destinée à un usage en milieu hospitalier.

Pour éviter ces problèmes, l'entreprise a mis en place il y a quelques années un protocole permettant de tester l'étanchéité de ses produits via une injection d'air pressurisé dans les pièces de robinetterie, et d'une mesure de la perte de pression dans la chambre. Cependant, il a été constaté qu'il n'y avait pas équivalence

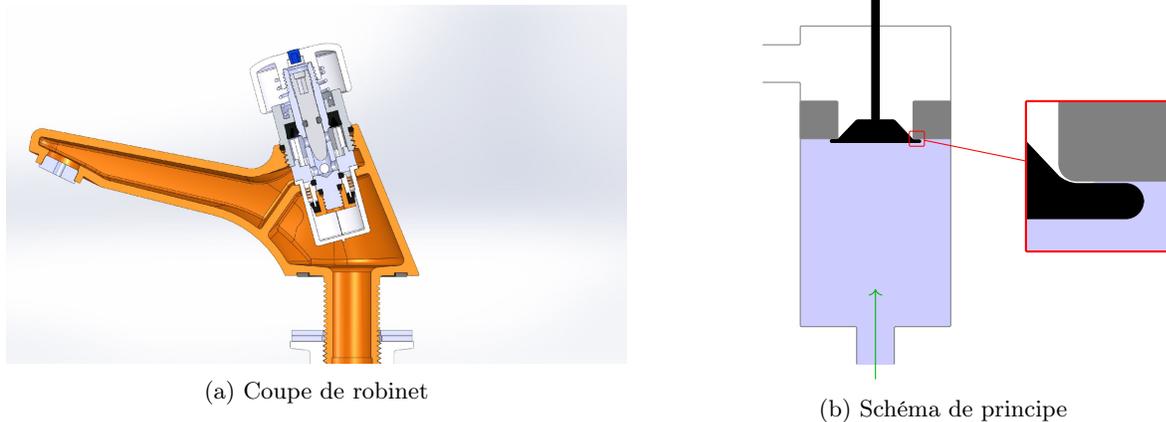


FIGURE 1 – À gauche : coupe de robinet. Les joints sont identifié par leur couleur noire. À droite : schéma de principe d’un joint dans un robinet. Une fuite pourrait se produire à l’endroit de l’agrandissement, entre le joint en noir et le reste du robinet en gris.

entre fuite d’eau d’une pièce de robinetterie et fuite d’air de cette même pièce. Aussi, la mise en place de tests en air demande au préalable une longue et coûteuse phase de détermination d’un seuil de fuite en air à partir duquel il y a fuite en eau effective.

C’est dans un but de détermination d’un seuil théorique de fuite en air que l’entreprise Delabie a proposé ce sujet à la Semaine d’Etudes Mathématiques-Entreprise de Lille 2023. Nous présenterons dans ce rapport nos résultats théoriques et numériques obtenus à l’issue d’une semaine de travail en collaboration avec l’entreprise. Nous tenons à remercier tant l’AMIES pour l’organisation de cet évènement que DELABIE qui nous a fourni ce sujet sur lequel nous avons pris beaucoup de plaisir à collaborer. Plus particulièrement, nous souhaitons remercier nos tuteurs académiques Olivier Goubet et Andrea Natale pour la grande aide qu’ils nous ont apporté, ainsi qu’Olivier Allibe et Cédric Le Boul, nos correspondants chez DELABIE, pour leur disponibilité et leurs réponses précises à nos besoins.

2 Démarche

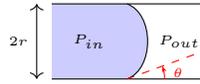
Par la suite, on considérera la partie métallique de la pièce de robinetterie comme parfaite. Ainsi, les potentielles fuites auront nécessairement lieu au niveau des joints. Ces fuites peuvent avoir des causes diverses :

- défauts de fabrication du joint
- présence de poussières ou autres débris gênant le bon fonctionnement du joint.

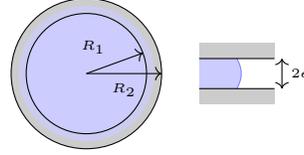
Par soucis de simplification, la chambre étudiée sera simple, avec un unique joint torique, de rayons intérieur et extérieur R_1 et R_2 , comme illustré sur la figure 1. Deux modélisations seront abordées (voir figure 2) :

- dans la première, modélisant la présence de débris entre le joint et la partie métallique de la chambre, on modélise la fuite comme un écoulement dans un capillaire de longueur $L = R_2 - R_1$ connue et de rayon r inconnu.
- dans la seconde, modélisant un défaut de fabrication du joint, on suppose qu’il y a fuite sur tous les côtés du joint, et on étudie un écoulement de fluides entre deux plans séparés d’une épaisseur inconnue e .

Ces deux modélisations seront étudiées en parallèles, en considérant d’abord l’écoulement d’eau, puis l’écoulement d’air. Dans la première partie, on exploitera des lois de Laplace-Young pour déterminer un



(a) Modélisation de la fuite par un capillaire



(b) Modélisation de la fuite par un écoulement circulaire

FIGURE 2 – Modélisations d’une fuite

rayon seuil (resp. une épaisseur seuil) à partir duquel l’eau s’écoule malgré le joint. Dans la seconde, à partir du différentiel de pression en air constaté à la mesure, on déterminera l’expression du rayon (resp. de l’épaisseur) de la fuite, et on en déduira un test sur le différentiel de pression en air constaté permettant de déterminer la présence ou non d’une fuite en eau. Seront également présentées des simulations numériques des deux types d’écoulement.

Par la suite, nous utiliserons les notations suivantes :

- V est le volume de la chambre (en m^3)
- n est la quantité de matière dans la chambre (en mol)
- $R_p = 8.314 \text{ kg m}^2 \text{ K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ la constante des gaz parfaits
- T la température dans la chambre (en K)
- D_n est le débit molaire à la sortie de la chambre (en mols^{-1})
- D_V est le débit volumique à la sortie de la chambre (en $\text{m}^3 \text{ s}^{-1}$)
- ρ_{in} est la masse volumique de l’air à l’intérieur de la chambre (en kg m^{-3})
- M_{air} est la masse molaire de l’air (en kg mol^{-1})
- μ est la viscosité dynamique de l’air à température T (en N m^{-1})
- P_{in} est la pression du fluide considéré à l’intérieur de la chambre (en Pa)
- P_{out} est la pression de l’air à l’extérieur de la chambre ($P_{\text{out}} = 1 \text{ atm} = 1.01325 \times 10^5 \text{ Pa}$)
- $\Delta P = P_{\text{in}} - P_{\text{out}}$ la différence de pression entre l’intérieur et l’extérieur : typiquement, $\Delta P = 3 \text{ bar}$.

2.1 Écoulement d’eau

Dans cette partie, nous étudierons donc l’écoulement de l’eau dans les deux modélisations de fuites susmentionnées. La différence entre les écoulements en eau et en air provient de la présence d’un interface eau-air dans le cas de l’écoulement d’eau. À cet interface, un phénomène appelé tension superficielle d’un fluide intervient, occasionnant une force réactive supplémentaire contrant potentiellement l’écoulement de l’eau.

Nous commencerons par décrire ce phénomène de tension de surface, puis exposerons les lois le régissant dans les deux modèles et les résultats en découlant, et finalement nous présenterons une simulation numérique de la fuite en eau.

2.1.1 Tension de surface

À l’intérieur d’un fluide, les molécules interagissent entre elles, créant une force cohésive symétrique. En revanche, à l’interface entre deux fluides, cette force d’interaction devient disymétrique, car les molécules d’un fluide n’interagissent pas avec les molécules de l’autre fluide de la même manière (voir figure 3). Ce phénomène, appelé tension de surface, ou tension superficielle, crée une force additionnelle qui tend à placer l’interface dans une configuration d’énergie minimale. Cette force est régie par la loi de Laplace-Young.

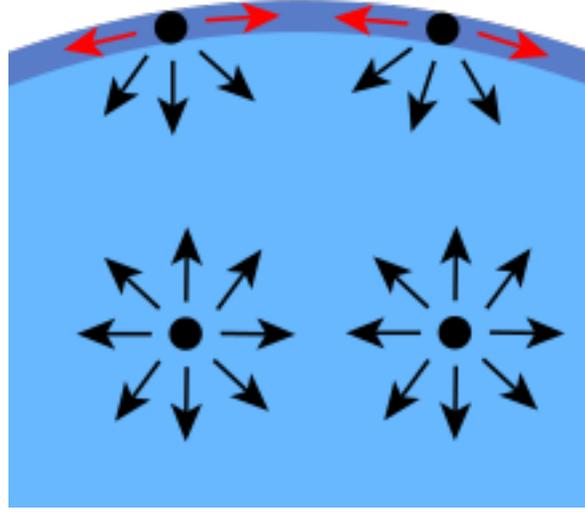


FIGURE 3 – Interactions de molécules à un intervalle liquide-gaz

2.1.2 Loi de Laplace-Young dans un capillaire

Dans cette partie, on considère un capillaire, i.e. un cylindre de rayon r , de longueur L , rempli à son entrée d'une eau à pression P_{in} , et à sa sortie d'air à pression P_{out} (voir figure 2a). En supposant le régime stationnaire atteint, on peut négliger les transferts de matière entre liquide et gaz, et donc appliquer la loi de Laplace-Young.

Cette loi décrit le phénomène de tension superficielle, reliant le différentiel de pression ΔP des deux côtés de l'interface liquide-gaz et la courbure moyenne H de l'interface :

$$\Delta P = 2\gamma H.$$

Le coefficient γ est une constante dépendant des deux fluides de part et d'autre de l'interface, et de la température. Dans un souci de simplicité, nous supposons ici que l'interface est une portion de sphère. En notant r le rayon du capillaire et θ l'angle de contact entre le liquide et le bord du capillaire (voir figure 2), on obtient :

$$H = \frac{\cos(\theta)}{r},$$

d'où

$$\Delta P = \frac{2\gamma \cos(\theta)}{r}, \quad \text{ou} \quad \cos(\theta) = -\frac{r\Delta P}{2\gamma}.$$

On remarque alors que l'angle θ , et donc la relation est bien définie uniquement si :

$$\frac{r\Delta P}{2\gamma} \in [-1, 1].$$

Or, le fait que θ soit bien défini est équivalent à la présence d'un ménisque dans le capillaire, i.e. l'absence de fuite. On en déduit que si

$$\frac{r\Delta P}{2\gamma} \notin [-1, 1],$$

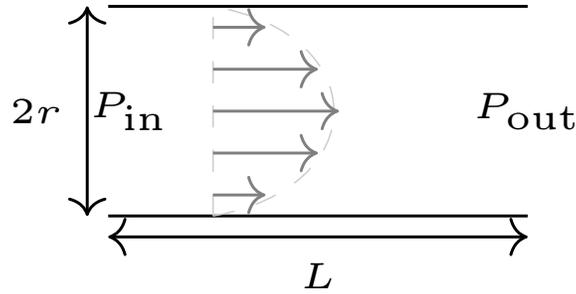


FIGURE 4 – Écoulement de Poiseuille dans une conduite

la tension de surface ne suffit pas à arrêter l'écoulement du liquide. En particulier, on en conclut l'expression du rayon seuil :

$$r_{\text{seuil}} = \frac{2\gamma}{\Delta P}.$$

Dans le cas d'une interface entre eau et air à 20°C, on a $\gamma = 72.8 \text{ N m}^{-1}$. En prenant $\Delta P = 3 \times 10^5 \text{ Pa}$, on obtient un rayon seuil de :

$$r_{\text{seuil}} = 0.49 \mu\text{m}.$$

Ce rayon est donc la limite à partir de laquelle l'eau fuit : si on a donc un trou de forme capillaire de rayon $r \geq r_{\text{seuil}}$, alors on a une fuite en eau. Sinon, non. On va déterminer dans la section suivante une formule pour calculer le rayon effectif d'une fuite en fonction du différentiel de pression en air observé, et la comparaison avec ce rayon seuil permettra de déterminer la présence ou non d'une fuite en eau.

2.1.3 Loi de Laplace-Young cylindrique

Tout d'abord, étudions le cas de la seconde modélisation de la fuite. Reprenons les notations usuelles, ainsi que celles introduites dans la figure 2. Via des calculs liés à l'angle de contact, on calcule qu'une loi de Laplace-Young similaire s'applique dans le cas de la modélisation cylindrique :

$$\Delta P = \gamma H.$$

En particulier, on en déduit la formule d'une épaisseur seuil suivante :

$$e_{\text{seuil}} = \frac{\gamma}{\Delta P}.$$

Dans la section suivante, on va déduire du différentiel de pression observé une épaisseur de fuite, qu'on pourra alors comparer à cette valeur pour déterminer s'il y aurait fuite en eau ou non.

2.2 Écoulement d'air

Dans cette partie, on va étudier le cas du test en air de la pièce. Cette fois, c'est donc de l'air sous pression qui est injecté dans la chambre, et qui va s'écouler par la fuite. On va utiliser les formules de Poiseuille régissant le débit d'écoulement d'un fluide visqueux dans un capillaire ou entre deux plaques.

2.2.1 Écoulement de Poiseuille dans un capillaire

On suppose ici que la chambre du robinet fuit au travers d'un capillaire cylindrique de rayon r . Dans le cylindre, on considère que l'écoulement est incompressible et laminaire. Il s'agit donc d'un écoulement de

Poiseuille et se fait donc dans la direction du cylindre (voir figure 4). Pour ce type d'écoulement, le débit volumique à travers une section transversale S , qui est ici un disque de rayon r , est :

$$D_V = \int_S \vec{u} \cdot \vec{n} ds = -\frac{\pi \Delta P r^4}{8\mu L}.$$

De plus, on suppose que le gaz dans la chambre suit la loi des gaz parfaits :

$$P_{\text{in}} V = n R_p T.$$

Ainsi, la variation de quantité de matière entre les instants t et $t + \Delta t$ s'exprime comme

$$n(t + \Delta t) = n(t) + \Delta t D_n = n(t) + \Delta t D_V \frac{\rho_{\text{in}}}{M_{\text{air}}},$$

où D_n est le débit molaire, ρ_{in} est la masse volumique du gaz dans la chambre et M_{air} est la masse molaire de l'air. On obtient donc

$$\begin{aligned} P_{\text{in}}(t + \Delta t) &= n(t + \Delta t) \frac{R_p T}{V} \\ &= \frac{R_p T}{V} n(t) + \Delta t \frac{D_V R_p T \rho_{\text{in}}}{V M_{\text{air}}} \\ &= P_{\text{in}}(t) - \Delta t \frac{\pi \Delta P r^4 R_p T \rho_{\text{in}}}{8\mu L V M_{\text{air}}}. \end{aligned}$$

Enfin, si on note $\delta P = P_{\text{in}}(t) - P_{\text{in}}(t + \Delta t)$, on a

$$\delta P = \Delta t \frac{\pi \Delta P r^4 R_p T \rho_{\text{in}}}{8\mu L V M_{\text{air}}},$$

ce qui donne finalement

$$r_{\text{fuite}} = \left(\delta P \frac{L V}{\Delta t \Delta P} \frac{8\mu M_{\text{air}}}{\pi R_p T} \right)^{1/4}.$$

Il s'agit donc d'une formule permettant d'estimer le rayon de la fuite à partir du différentiel de pression observé. En le comparant à la formule théorique du rayon seuil de fuite en eau obtenue en section 2.1.2, on obtient un test de fuite en eau à partir d'un différentiel de pression en air.

Illustrons ce résultat d'applications numériques : pour celles-ci, utilisons les données fixes suivantes :

- $R_p = 8.314 \text{ kg m}^2 \text{ K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$,
- $M_{\text{air}} = 2.8965 \times 10^{-2} \text{ kg mol}^{-1}$,
- $T = 293.15 \text{ K}$,
- $\mu = 1.816 \times 10^{-5} \text{ N m}^{-1}$,
- $\Delta P = -3 \times 10^5 \text{ Pa}$,
- $\rho_{\text{in}} = \left(1 + \frac{\Delta P}{P_{\text{out}}}\right) \rho_{\text{air}} = 4.77 \text{ kg m}^{-3}$,
- $L = 2 \times 10^{-3} \text{ m}$,
- $V = 5.072 \times 10^{-5} \text{ m}^3$,
- $\delta P = -2.5 \times 10^1 \text{ Pa}$.

Cela nous permet de calculer le rayon du capillaire : $r_{\text{fuite}} = 5.59 \mu\text{m}$.

2.2.2 Écoulement de Poiseuille cylindrique

On considère ici que la fuite a lieu de tous les côtés du joint torique. Ainsi, notons R_1 et R_2 les rayons intérieurs et extérieurs du tore, e la moitié de l'épaisseur de la fuite, ainsi que représenté en figure 2. Notons également, à point fixé dans le cylindre, z son écart relatif au disque central (la moitié du cylindre). Ainsi, si $z = e$, le point est sur la partie supérieure ou inférieure du cylindre.

Sous l'hypothèse de laminarité et d'incompressibilité du fluide, la loi de Poiseuille s'applique, et la vitesse du fluide ne dépend que de sa position verticale dans le cylindre. Ainsi $\forall z \in [-e, e]$:

$$U(z) = \frac{\Delta P}{4\mu L}(e^2 - z^2),$$

où $L = R_2 - R_1$ la longueur de la fuite. On obtient alors la formule de débit linéique (i.e. du fluide passant par un segment sur la hauteur du cylindre, d'un côté uniquement) suivante :

$$Q_l = \int_{-e}^e \frac{\Delta P}{4\mu L}(e^2 - z^2)dz = \frac{\Delta P e^3}{3\mu(R_2 - R_1)}.$$

On en déduit la formule de débit totale :

$$Q = Q_l \pi (R_1 + R_2) = \frac{\Delta P e^3 \pi (R_1 + R_2)}{3\mu(R_2 - R_1)}.$$

Via un calcul identique à celui mené en section 2.2.1, on obtient :

$$\delta P = \frac{\Delta P e^3 \pi (R_1 + R_2)}{3\mu(R_2 - R_1)} \frac{\rho_{\text{in}} R_p T}{M_{\text{air}} V},$$

ou :

$$e_{\text{fuite}} = \sqrt[3]{\delta P \frac{3\mu(R_2 - R_1)}{\Delta P \pi (R_1 + R_2)} \frac{M_{\text{air}} V}{\rho_{\text{in}} R_p T}}.$$

Il s'agit donc d'une formule permettant d'estimer l'épaisseur de la fuite à partir du différentiel de pression observé. En le comparant à la formule théorique de l'épaisseur seuil de fuite en eau obtenue en section 2.1.3, on obtient un test de fuite en eau à partir d'un différentiel de pression en air.

2.2.3 Écoulement laminaire et écoulement incompressible

Afin de vérifier nos hypothèses, on dispose de plusieurs indicateurs : Le premier est le nombre de Reynolds (noté R_e), c'est un nombre sans dimension qui nous permet de confirmer que l'écoulement est bien laminaire. Il est donné par la formule suivante

$$R_e = \frac{2vr\rho_{\text{in}}}{\mu}$$

où

- v est la vitesse du fluide (en m s^{-1})
- r le rayon du capillaire (en m).

Ce nombre permet de distinguer deux cas différents :

- Si $R_e \lesssim 1000$ alors l'écoulement est laminaire
- Si $R_e \gtrsim 1000$ alors l'écoulement est turbulent.

Cependant pour pouvoir calculer ce nombre, il faut connaître la vitesse du fluide, on a supposé que l'on avait un écoulement de Poiseuille. Pour cet écoulement, on dispose d'une formule pour la vitesse du fluide dans le capillaire, elle est donnée par

$$v(t) = \frac{P_{\text{in}} - P_{\text{out}}}{4\mu L}(r^2 - t^2)$$

avec $0 \leq t \leq r$ est la distance au centre du capillaire.

La vitesse est maximale au centre du capillaire, c'est-à-dire pour $t = 0$. Dans le cas de notre capillaire, pour $r = r_{\text{fuite}}$, on obtient

$$v(0) = 64.5 \text{ m s}^{-1}.$$

Pour le nombre de Reynolds, on trouve ainsi

$$R_e = 189 < 1000$$

Le nombre de Reynolds est bien inférieur à 1000, on peut donc supposer que notre écoulement est laminaire. Le deuxième indicateur est le nombre de Mach (noté M_a). C'est également un nombre sans dimension qui permet de déterminer si notre fluide est incompressible ou non (c'est-à-dire si la masse volumique du fluide varie lors de l'écoulement). Ce nombre est donné par

$$M_a = \frac{v}{c}$$

où

— c est la vitesse du son dans le fluide considéré (en m s^{-1}).

Si dans un écoulement on a

$$M_a < 0.3$$

alors on peut considérer que l'écoulement est incompressible.

Dans notre cas, on a

$$M_a = 0.19.$$

On peut donc considérer que notre écoulement est incompressible.

2.3 Simulations numériques

L'ensemble des simulations ont été effectuées à l'aide du logiciel open-source FreeFEM, spécialement conçu pour la modélisation des équations aux dérivées partielles par des méthodes des éléments finis.

2.3.1 Cas de l'écoulement d'air

Dans cette partie nous allons étudier un modèle simplifié d'une fuite d'air dans une chambre mise sous pression, le but est d'étudier l'impact de la taille de la fissure de taille ε sur la chute de pression dans cette chambre. Pour cela on modélise l'écoulement d'air au niveau de la chambre par les équations d'Euler compressible, et on évaluera par la suite la variation de la pression P en chaque temps à l'intérieur de la chambre pendant une durée de 10 seconde. On note \mathbf{u} la vitesse de l'écoulement d'air dans la chambre défini par un domaine Ω , et ρ sa densité. On supposera aussi que la pression à l'extérieur de la chambre qui est la pression atmosphérique nulle, et pour simplifier le modèle nous allons considérer un domaine Ω représentant une coupe bi-dimensionnelle de la chambre. Les équations d'Euler se définissent alors ainsi :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \text{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, & \text{sur } \Omega \\ \rho(\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) + \nabla P = 0. & \text{sur } \Omega \end{cases} \quad (1)$$

qu'on munit des condition aux bord de type Dirichlet homogène pour la vitesse ($\mathbf{u} = 0$) au niveau des parois de la chambre et une condition $P = 35 \text{ Pa}$ au niveau de l'interface représentant la fissure, et d'une condition initiale sur la pression $P_0(\mathbf{x}) = P(0, \mathbf{x}) = 35 \text{ Pa}$, on complète ses équations par une équation dite d'état, et comme l'air est supposé un gaz parfait notre équation d'état s'écrit alors $P = C\rho$ où C est une constante. Dans la figure 5, on peut voir que plus la fissure est grande plus la chute de pression est grande, est la variance est linéaire.

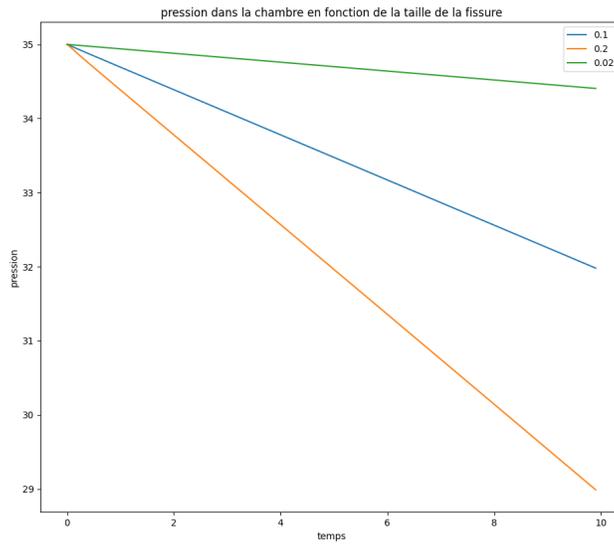


FIGURE 5 – Évolution de la pression en fonction du temps dans plusieurs chambres admettant des fissures de différentes taille en *cm*

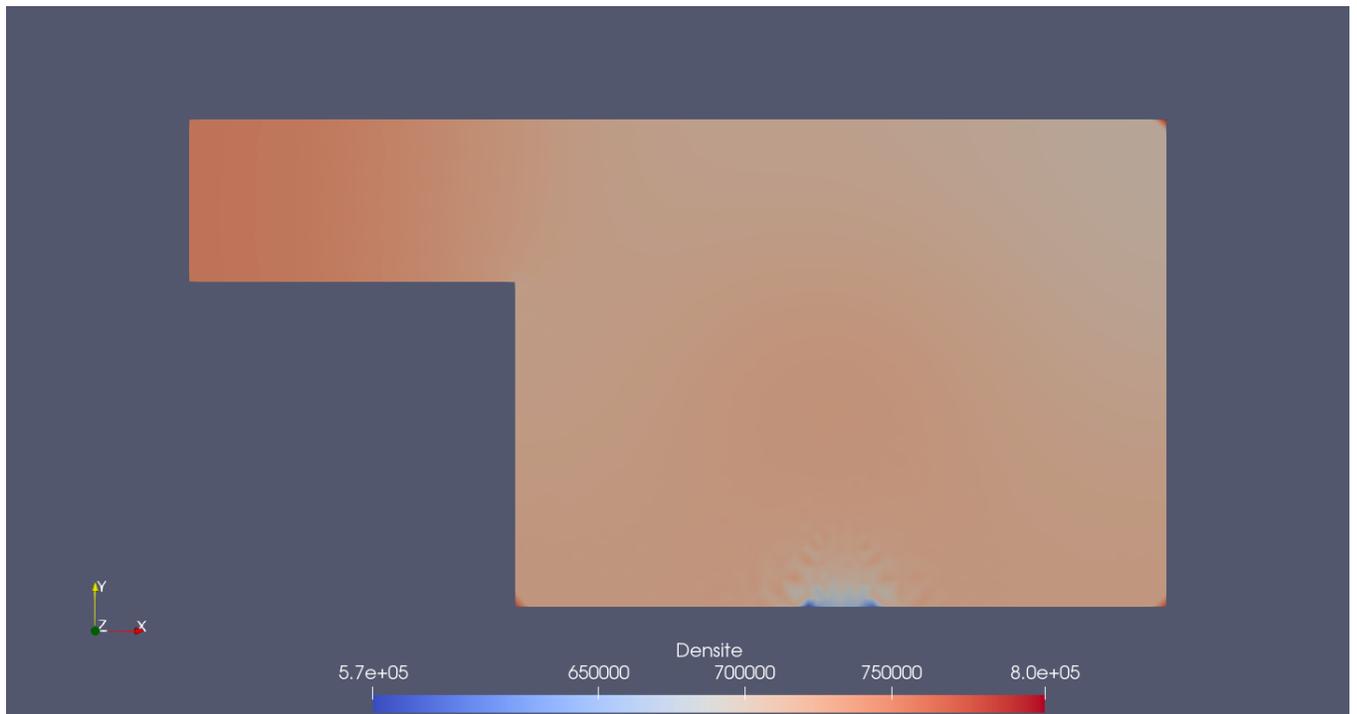


FIGURE 6 – Distribution de la pression a l'instant 2s, pour une fissure de taille 0.2cm



FIGURE 7 – Visualisation d’un ménisque apparue au niveau de la fissure sous l’effet de la tension superficielle de l’eau

2.3.2 Cas de l’écoulement d’eau

A présent nous allons cette fois-ci étudier une fuite d’eau dans la chambre, on prendra le même domaine (celui-ci représentera la chambre en question) que dans le cas d’une fuite d’air. L’eau étant un fluide newtonien incompressible, l’écoulement sera modélisé par des équations de Navier-Stokes. Nous supposeront un débit à l’entrée du domaine qui se situe en haut à droite du domaine, et une fissure en bas du domaine, notre objectif dans cette partie est de faire apparaître un ménisque sous l’effet de la tension de surface γ , et comme la fissure considéré est très grande, la tension superficielle elle aussi est très grande. On obtiendra γ grâce au fait qu’à un certain moment il y est un équilibre entre la contrainte du fluide appliquée à l’air à l’interface eau-air (au niveau de la fissure) est la force dû à la tension superficielle. Les équations de la mécanique des fluides sont données par :

$$\begin{cases} \rho(\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) - \mu \Delta \mathbf{u} + \nabla P = 0. & \text{sur } \Omega \\ \text{div}(\mathbf{u}) = 0, & \text{sur } \Omega \end{cases}$$

On munit nos équations de conditions aux bords de type Dirichlet homogène $\mathbf{u} = 0$ au niveau des paroi de la chambre, et au niveau de l’interface $\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = 0$ où $\boldsymbol{\sigma}$ est le tenseur des contraintes associé au fluide, \mathbf{n} la normale au niveau de la surface. Comme indiqué on impose un débit au niveau du bords en haut à droite du domaine $\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = D_0$.

3 Conclusion

3.1 Hypothèses effectuées

Au cours de notre cheminement, nous avons dû effectuer de nombreux choix et hypothèses pour simplifier le problème, de manière plus ou moins justifiées. Concernant l'étude théorique, ces choix se subdivisent en deux parties distinctes : d'une part, les choix concernant la modélisation physique de la pièce de robinetterie. Résumons les ci-dessous :

- Nous avons choisi d'étudier une chambre unique, de volume V fixé, mais sans hypothèse a priori sur sa configuration, outre les points suivants
- Le matériau métallique est supposé étanche, les seules fuites potentielles venant des joints
- Il n'y a qu'un seul joint torique, d'élasticité supposée négligeable en régime permanent.

Distinguons désormais les hypothèses effectuées dans les parties théoriques et numériques de ce rapport.

Modèle théorique

D'autre part, nous avons fait des hypothèses simplificatrices concernant l'écoulement fluide. Tout d'abord, pour les écoulements d'eau et d'air :

- l'état stationnaire est supposé atteint, i.e. que toutes les grandeurs physiques ne dépendent plus du temps
- le système est supposé isolé, i.e. qu'aucune force extérieure n'entre en jeu (en particulier, la gravité)
- la forme de la fuite, telle que modélisée, est supposée sans défauts (le capillaire est parfaitement cylindrique, et dans l'autre cas, les deux plans sont parfaitement plans), et le matériau unique utilisé est sans influence sur l'écoulement
- l'écoulement du fluide est supposé laminaire et incompressible et on vérifie après ces hypothèses. Mathématiquement parlant ça n'a pas beaucoup de sens. Il faudrait avoir une idée de la vitesse du fluide pour pouvoir avoir un ordre de grandeur des nombres de Reynolds et de Mach.

De plus, dans le cas spécifique de l'eau :

- le ménisque est supposé de forme sphérique dans le cas du capillaire, et dans le cas des deux plaques.

Et dans le cas spécifique de l'air :

- le débit de fuite en air est supposé constant sur l'échelle de temps considérée
- l'air dans la chambre est considéré comme une espèce unique de masse molaire M_{air} , se comportant comme un gaz parfait.

Modèle numérique

En ce qui est des simulations numériques, des hypothèses simplificatrices ont été effectuées dans ces modèles à savoir :

- Dans le modèle air-air nous avons supposé que l'air est un gaz parfait, ainsi nous avons pu obtenir une correspondance linéaire entre la pression et la densité de l'air. En ce qui est de la résolution numérique des équations (1), nous avons opté pour un schéma explicite en temps pour la densité, ce qui permet de nous affranchir du caractère non-linéaire des équations.
- Dans le modèle eau-air, comme dans le modèle air-air, on s'est donné des tailles de fissure très importantes, autrement les calculs numériques seront très chères voire impossibles à réaliser, et du coup pour rattraper cette hypothèse de fissures très importantes, nous avons (après le calcul) trouvé une tension superficielle très importante.

3.2 Résultats obtenus

Sous les hypothèses mentionnées dans la section précédente, nous avons donc obtenu deux critères théoriques déterminant l'existence d'une fuite en eau en fonction d'une fuite en air observée.

Le premier critère a donc été obtenu via la modélisation de la fuite comme échappement du fluide à travers une unique percée circulaire de rayon r , à travers un matériau d'épaisseur L (la longueur du cylindre considéré). Le critère obtenu est donc le suivant : si

$$r_{\text{fuite}} = \left(\delta P \frac{LV}{\Delta t \Delta P} \frac{8\mu M_{\text{air}}}{\pi R_p T} \right)^{1/4} \geq \frac{2\gamma}{\Delta P} = r_{\text{seuil}},$$

alors le critère prédit une fuite en eau. Autrement, le critère prédit une absence de fuite en eau.

Le second critère a été obtenu via la modélisation de la fuite comme échappement du fluide à travers une unique percée, mais cette fois-ci supposée supposée sur le bord extérieur d'un cylindre, comme si le fluide fuyait de tous les côtés d'un unique joint torique. En notant e la moitié de la hauteur de ce cylindre, et $R_1 \leq R_2$ les deux rayons (intérieur et extérieur) du joint, ce critère prédit la fuite en eau si et seulement si :

$$e_{\text{fuite}} = \sqrt[3]{\delta P \frac{3\mu(R_2 - R_1)}{\Delta P \pi (R_1 + R_2)} \frac{M_{\text{air}} V}{\rho_{\text{in}} R_p T}} \geq \frac{\gamma}{\Delta P} = e_{\text{seuil}}.$$

Évidemment, ces critères sont à prendre en compte avec discernement : les modélisations, ainsi que les hypothèses simplificatrices effectuées, mèneront sûrement à des erreurs, potentiellement non-négligeables sur la présence ou non de fuite en eau. Néanmoins, ils sont un premier pas vers des résultats théoriques plus aboutis, qui, potentiellement, modéliseraient bien mieux le problème. La possibilité de modélisations numériques serait probablement le meilleur choix pour adapter la modélisation à la forme de la chambre étudiée, mais la taille des fuites proportionnellement aux chambres est encore, à ce stade, réhibitoire.

3.3 Perspectives

Comme on vient de le voir, de nombreuses hypothèses et choix de modélisation ont été faits dans ce rapport. Certaines ont été justifiées via des ordres de grandeur (typiquement, la laminarité de l'écoulement, d'autres nous parurent raisonnables sur le moment. Détaillons à présent quelques pistes pour potentiellement augmenter la précision du modèle.

Perspectives théoriques

Tout d'abord, d'un point de vue de la modélisation de la chambre. Au vue des procédés de tests de DELABIE, l'hypothèse d'étanchéité du matériau métallique semble adéquate, ainsi que le fait de considérer une chambre unique, de configuration inconnue : prendre en compte la forme de cette chambre complexifierait de manière colossale l'analyse théorique du modèle, et n'apporterait sans doute pas grand chose. À noter que ce ne sera pas nécessairement le cas pour la partie numérique (cf partie suivante).

Supposer la présence d'un nombre connu, et strictement plus grand que 1, de joints, ne devrait en revanche pas modifier beaucoup l'analyse théorique : a priori, les fuites en air engendrées seront juste démultipliées par le nombre de joints dans la chambre. Toutefois, cela expose la déduction de la présence d'une fuite en eau à des soucis supplémentaires : en effet, le différentiel δP de pression mesuré correspond à une baisse globale de pression, et ne fournit en aucun cas une information sur les potentielles fuites sur chacun des joints considérés. Par exemple, il est possible que 5 joints provoquent une fuite en air qui, à δP égal, donnerait une fuite en eau s'il n'y avait qu'un seul joint. De fait, ce problème n'en est peut-être pas un : la donnée du nombre de joints, et potentiellement le calcul d'une moyenne, pour chaque joint donné, de fuites en air,

permettrait d'établir un seuil adapté à cette chambre, en évitant de tomber dans une sur-qualité économiquement désavantageuse.

Pour ce qui est de la modélisation du joint, il est probablement envisageable d'étendre la méthode, ici appliquée aux joints toriques, à d'autres types de joints de configurations variées. Le phénomène principal mis en jeu ici étant la tension de surface, il est probable qu'avec des hypothèses raisonnables sur la forme du joint, les résultats se ré-appliquent sans trop de difficultés aux différents types de joints. La prise en compte de l'élasticité du joint, bien que modérée une fois le régime permanent atteint, pourrait également être une piste intéressante à explorer. Certainement, celle-ci devrait avoir un effet sur la tension de surface, notamment via l'angle de contact, a priori différent pour chaque interface solide-liquide.

Passons à présent à une analyse des hypothèses théoriques concernant la mécanique des fluides. Certaines hypothèses (régime permanent, système isolé) sont intrinsèquement liées à la procédure de test ou aux circonstances d'utilisation de la robinetterie. D'autres (absence de rugosité des matériaux utilisés, sphéricité du ménisque) pourraient être remises en question, mais sont probablement raisonnables et soulèveraient des questions théoriques et expérimentales ardues. Reste les hypothèses liées à la modélisation du fluide en écoulement : la loi des gaz parfaits, premièrement, est une hypothèse très forte, et probablement assez facilement remplaçable par une autre équation d'état, prenant en compte de manière plus fine les interactions entre les différents gaz dans l'air ambiant par exemple, l'équation d'état de Van der Waals. Les autres hypothèses importantes sont celles de laminarité de l'écoulement, et d'incompressibilité du fluide. Elles sont justifiées dans le cas étudié, et les omettre, surtout la première, compliquerait sévèrement la tâche.

Perspectives numériques

- En ce qui est des perspectives numériques, certaines améliorations peuvent être apportées, à savoir :
- Le domaine Ω considéré est bi-dimensionnel, ce qui ne représente pas vraiment la réalité puisque la chambre en question est un objet de dimension 3, il faudra donc se placer dans un domaine tri-dimensionnel et lancer les calculs numériques dans ce domaine, ce qui risque en revanche d'engendrer des coûts plus élevés, en temps ou puissance de calcul.
 - Dans le cas de l'écoulement d'air, nous avons opté pour un schéma explicite en temps, il faudra envisager un algorithme de type Newton pour traiter le caractère non-linéaire de ses équations. Par ailleurs nous avons supposé que l'air est un gaz parfait, ce qui n'est en pratique pas vrai, il faudra donc opter pour une nouvelle équation d'état, pour obtenir une meilleure représentation de l'écoulement.
 - D'autre part, la taille de la fissure modélisée, comme précisé dans la partie 2.3, est beaucoup plus grande qu'en réalité. Pour obtenir des tailles de fissure très petites on peut envisager de faire un maillage adaptatif, qui consiste à mailler très finement au niveau de la fissure et grossièrement ailleurs.
 - Finalement, une piste potentiellement intéressante à explorer, serait de contrer le problème du diamètre de la fuite en modifiant les paramètres physiques des fluides : par exemple, pour la modélisation de la fuite en air, le débit de cette fuite est à première proportionnel au diamètre de la fuite, et inversement proportionnel à la viscosité de l'air. Ainsi, d'un point de vue théorique, diminuer le diamètre de la fissure ou augmenter la viscosité de l'air est à peu près équivalent lorsqu'il s'agit d'observer un débit sortant. Bien entendu, cela peut changer quelque chose d'un point de vue numérique, mais à condition de savoir quantifier à quel point cette nouvelle modélisation est inadéquate, l'utiliser pourrait être approprié : en effet, un diamètre de fuite plus important demande une discrétisation plus grossière, qui serait alors potentiellement abordable. De la même manière, pour la modélisation de la fuite en eau, augmenter la force de la tension de surface permettrait d'augmenter la taille de la fuite (c'est ainsi que la modélisation a été faite dans ce document).