Méthodes d'analyse convexe pour la contrôlabilité sous contraintes en dimension finie

Ivan Hasenohr

Plan

Plan

Fixons X, Y des espaces Hilbert, $y_0 \in X$, $T > 0$ et $F : [0, T] \times X \times Y \to X$.
Pour $u \in L^\infty(0, T; Y)$, on appelle système de contrôle le système :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = F(t, y(t), u(t)) & \forall t \in [0, T] \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

On note $y_{y_0,u} : [0, T] \to X$ la solution de ce système.

Définition

Pour $y_0, y_f \in X$, $\mathcal{U} \subset L^\infty(0,T;Y)$, soit le système de contrôle :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = F(t, y(t), u(t)) & \forall t \in [0,T] \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

On dit que ce système est contrôlable de y_0 à y_f sous les contraintes $\mathcal{U}$ si :

$$\exists\, u \in \mathcal{U} \text{ tel que } y_{y_0,u}(T) = y_f.$$

Définition

Pour $y_0, y_f \in X$, $\mathcal{U} \subset L^\infty(0,T;Y)$, soit le système de contrôle :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = F(t, y(t), u(t)) & \forall t \in [0,T] \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

On dit que ce système est contrôlable de y_0 à y_f sous les contraintes $\mathcal{U}$ si :

$$\exists u \in \mathcal{U} \text{ tel que } y_{y_0,u}(T) = y_f.$$

De même, on dit que ce système est approximativement contrôlable si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists u \in \mathcal{U} \text{ tel que } \|y_{y_0,u}(T) - y_f\| \leq \varepsilon.$$

Définition

Pour $y_0, y_f \in X$, $\mathcal{U} \subset L^\infty(0,T;Y)$, soit le système de contrôle :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = F(t, y(t), u(t)) & \forall t \in [0,T] \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

On dit que ce système est contrôlable de y_0 à y_f sous les contraintes $\mathcal{U}$ si :

$$\exists\, u \in \mathcal{U} \text{ tel que } y_{y_0,u}(T) = y_f.$$

De même, on dit que ce système est approximativement contrôlable si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, u \in \mathcal{U} \text{ tel que } \|y_{y_0,u}(T) - y_f\| \leq \varepsilon.$$

Un tel contrôle u est appelé contrôle admissible.

Proposition

Si X et Y sont de dimension finie, et si $\mathcal{U}$ est compact, un système de contrôle est contrôlable de y_0 vers y_f si et seulement si il est approximativement contrôlable.

Prenons le système suivant : $X = Y = \mathbb{R}$, $\mathcal{U} = \mathbb{R}_+$, et $y_0 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = u(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0, T] \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Prenons le système suivant : $X = Y = \mathbb{R}$, $\mathcal{U} = \mathbb{R}_+$, et $y_0 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = u(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0, T] \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Alors $\forall t \in [0, T]$,

$$y(t) = y_0 + \int_0^t u(x)\,\mathrm{d}x \geq y_0.$$

Exemple : obstruction à la contrôlabilité

Prenons le système suivant : $X = Y = \mathbb{R}$, $\mathcal{U} = \mathbb{R}_+$, et $y_0 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = u(t) \geq 0 & \forall t \in [0, T] \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Alors $\forall t \in [0, T]$,

$$y(t) = y_0 + \int_0^t u(x)\,\mathrm{d}x \geq y_0.$$

On a donc, pour $y_f < y_0$ et pour $\mathcal{U} = \mathbb{R}_+$, non-contrôlabilité du système.

Supposons le système contrôlable pour $y_0, y_f \in X$ et $\mathcal{U} \subset Y$ fixés. Soit $C : L^\infty(0, T; Y) \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle de coût. La problématique du contrôle optimal est la suivante : trouver, s'il existe,

$$\underset{\substack{u \in \mathcal{U} \\ y_{y_0,u}(T) = y_f}}{\arg\min} \; C(u).$$

Pour $X = Y = \mathbb{R}$, $\mathcal{U} = \mathbb{R}_+$, $y_0 = 0$, et $y_f = 1$ reprenons le système contrôlé :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = u(t) & \forall t \in [0, T] \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Pour $X = Y = \mathbb{R}$, $\mathcal{U} = \mathbb{R}_+$, $y_0 = 0$, et $y_f = 1$ reprenons le système contrôlé :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = u(t) \quad \forall t \in [0, T] \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Pour le coût $C_1 : u \mapsto \int_0^T u(t)\,\mathrm{d}t$, tous les contrôles admissibles sont optimaux.

Pour $X = Y = \mathbb{R}$, $\mathcal{U} = \mathbb{R}_+$, $y_0 = 0$, et $y_f = 1$ prenons le système contrôlé :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = u(t) \quad \forall t \in [0, T] \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Pour le coût $C_2 : u \mapsto \sup_{t \in [0,T]} u(t)$, le contrôle optimal est unique et vaut

$$u(t) = \frac{1}{T} \quad \forall t \in [0, T].$$

Pour $X = Y = \mathbb{R}$, $\mathcal{U} = \mathbb{R}_+$, $y_0 = 0$, et $y_f = 1$ prenons le système contrôlé :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = u(t) & \forall t \in [0, T] \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Pour le coût $C_3 : u \mapsto \int_0^T \sqrt{u(t)}\,\mathrm{d}t$, il n'existe aucun contrôle optimal : $\forall n \in \mathbb{N}$, le contrôle

$$u_n = \frac{n}{T}\,\chi_{[0, \frac{T}{n}]}$$

est admissible, et

$$\lim_{n \to +\infty} C(u_n) = \lim_{n \to +\infty} \sqrt{\frac{T}{n}} = 0,$$

alors que $C(u) = 0 \implies u = 0$ qui n'est pas admissible.

Fixons X, Y des espaces Hilbert, $y_0 \in X$, $T > 0$, $A \in \mathcal{L}(X, X)$ et $B \in \mathcal{L}(Y, X)$.
Pour $u \in L^\infty(0, T; Y)$, le système de contrôle se réécrit :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t) & \forall t \in [0, T] \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Fixons X, Y des espaces Hilbert, $y_0 \in X$, $T > 0$, $A \in \mathcal{L}(X, X)$ et $B \in \mathcal{L}(Y, X)$. Pour $u \in L^\infty(0, T; Y)$, le système de contrôle se réécrit :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t) & \forall t \in [0, T] \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

On obtient alors

$$y(T) = S_T y_0 + L_T u,$$

où S_T est le semi-groupe associé à A et $L_T \in \mathcal{L}(L^\infty(0, T; Y), X)$ l'application entrée-sortie.

Fixons X, Y des espaces Hilbert, $y_0 \in X$, $T > 0$, $A \in \mathcal{L}(X, X)$ et $B \in \mathcal{L}(Y, X)$. Pour $u \in L^\infty(0, T; Y)$, le système de contrôle se réécrit :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t) & \forall t \in [0, T] \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

On obtient alors

$$y(T) = S_T y_0 + L_T u,$$

où S_T est le semi-groupe associé à A et $L_T \in \mathcal{L}(L^\infty(0, T; Y), X)$ l'application entrée-sortie. En dimension finie,

$$S_T y_0 = e^{TA} y_0, \text{ et } L_T u = \int_0^T e^{(T-t)A} Bu(t) \,\mathrm{d}t$$

.

Théorème (Condition de Kalman)

Soit $n, m \in \mathbb{N}$, soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Considérons le système de contrôle linéaire autonome :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t) & \forall t \in [0, T] \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $\forall y_0, y_f \in \mathbb{R}^n$, *le système est contrôlable de y_0 à y_f*

(ii) L_T *est surjective*

(iii) *la matrice $C = (B, AB, \dots, A^{n-1}B)$ est de rang n.*

Plan

Analyse convexe

Reformulation

On se place dans le cadre de la contrôlabilité approchée d'un système linéaire autonome en dimension finie, où $X = \mathbb{R}^n$ et $Y = L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t) \quad \forall t \in [0, T] \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

On se place dans le cadre de la contrôlabilité approchée d'un système linéaire autonome en dimension finie, où $X = \mathbb{R}^n$ et $Y = L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t) & \forall t \in [0, T] \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Fixons $y_f \in X$, $\varepsilon > 0$ et

$$G : \begin{cases} X \to \mathbb{R} \\ y \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } \|y - y_f\| \leq \varepsilon \\ +\infty \text{ sinon }. \end{cases} \end{cases}$$

On se place dans le cadre de la contrôlabilité approchée d'un système linéaire autonome en dimension finie, où $X = \mathbb{R}^n$ et $Y = L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t) \quad \forall t \in [0, T] \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Fixons $y_f \in X$, $\varepsilon > 0$ et

$$G : \begin{cases} X \to \mathbb{R} \\ y \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } \|y - y_f\| \leq \varepsilon \\ +\infty \text{ sinon .} \end{cases} \end{cases}$$

Alors

Le système est contrôlable si et seulement si $\exists\, u \in \mathcal{U},\ G(L_T u) < +\infty$.

Donc

$$\text{Le système est contrôlable si et seulement si } \inf_{u \in \mathcal{U}} G(L_T u) < +\infty$$

Donc

$$\text{Le système est contrôlable si et seulement si } \inf_{u \in \mathcal{U}} G(L_T u) < +\infty,$$

ou bien :

$$\text{Le système est contrôlable si et seulement si}$$

$$\exists\, F : L^2(0, T; \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R} \text{ propre, telle que } \inf_{u \in \mathcal{U}} F(u) + G(L_T u) < +\infty.$$

Donc

$$\text{Le système est contrôlable si et seulement si } \inf_{u \in \mathcal{U}} G(L_T u) < +\infty,$$

ou bien :

Le système est contrôlable si et seulement si

$$\exists\, F : L^2(0, T; \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R} \text{ propre, telle que } \inf_{u \in \mathcal{U}} F(u) + G(L_T u) < +\infty.$$

En particulier, pour $F : L^2(0, T; \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$ propre fixée, pour montrer la contrôlabilité du système de 0 à y_f, il suffit de montrer que

$$\inf_{u \in \mathcal{U}} F(u) + G(L_T u) < +\infty.$$

Proposition - Définition

Soit $F : L^2(0, T; \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$ *propre, convexe et semi-continue inférieurement. Alors*

$$F^* : u \mapsto \sup_{v \in L^2(0,T;\mathbb{R}^m)} \langle u, v \rangle - F(v)$$

est propre, convexe et semi-continue inférieurement.

Proposition - Définition

Soit $F : L^2(0,T;\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$ *propre, convexe et semi-continue inférieurement. Alors*

$$F^* : u \mapsto \sup_{v \in L^2(0,T;\mathbb{R}^m)} \langle u, v \rangle - F(v)$$

est propre, convexe et semi-continue inférieurement.

Théorème

Soit $F : L^2(0,T;\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$ *propre, convexe et semi-continue inférieurement. Alors*

$$F^{**} = F.$$

Proposition - Définition

Soit $F : L^2(0, T; \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$ *propre, convexe et semi-continue inférieurement. Alors*

$$F^* : u \mapsto \sup_{v \in L^2(0,T;\mathbb{R}^m)} \langle u, v \rangle - F(v)$$

est propre, convexe et semi-continue inférieurement.

Théorème

Soit $F : L^2(0, T; \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$ *propre, convexe et semi-continue inférieurement. Alors*

$$F^{**} = F.$$

Dorénavant, on fixe $F \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ comme étant propre, convexe et semi-continue inférieurement. On peut vérifier que G l'est également.

Théorème

On a

$$\inf_{u\in L^2(0,T;\mathbb{R}^m)} F(u)+G(L_T u) \geq -\inf_{p\in\mathbb{R}^n} F^*(L_T^* p)+G^*(-p).$$

Théorème

On a

$$\inf_{u\in L^2(0,T;\mathbb{R}^m)} F(u)+G(L_T u) \geq -\inf_{p\in\mathbb{R}^n} F^*(L_T^* p)+G^*(-p).$$

On appelle problème primal $(\mathcal{P})$:

$$\inf_{u\in L^2(0,T;\mathbb{R}^m)} F(u)+G(L_T u),$$

et problème dual $(\mathcal{D})$:

$$\inf_{p\in\mathbb{R}^n} F^*(L_T^* p)+G^*(-p).$$

On parle alors de dualité faible entre les deux problèmes.

Définition

On dit que le problème $(\mathcal{P})$ *est stable si :*

$$\exists u \in L^2(0,T;\mathbb{R}^m) \text{ tel que } F(u) < +\infty \text{ et tel que } G \text{ soit continu en } L_T u.$$

De même, On dit que le problème $(\mathcal{D})$ *est stable si :*

$$\exists p \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } G^*(p) < +\infty \text{ et tel que } F^* \text{ soit continu en } L_T^* p^*.$$

Théorème (Fenchel-Rockafellar)

Si $(\mathcal{P})$ ou $(\mathcal{D})$ est stable, alors il y a dualité forte entre $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{D})$, i.e.

$$\pi := \inf_{u \in L^2(0,T;\mathbb{R}^m)} F(u) + G(L_T u) = -\inf_{p \in \mathbb{R}^n} F^*(L_T^*(p)) + G^*(-p) =: -d.$$

De plus :

- *si $(\mathcal{P})$ est stable et d fini, $(\mathcal{D})$ admet un minimiseur*
- *si $(\mathcal{D})$ est stable et π fini, $(\mathcal{P})$ admet un minimiseur.*

Définition

On appelle hamiltonien du système l'application

$$\mathcal{H} : \begin{cases} E \times X \to \bar{\mathbb{R}} \\ u, v \mapsto F(u) - \langle L_T u, v \rangle - G^*(-v) \end{cases} .$$

On appelle $(u^\star, v^\star) \in E \times X$ *point selle du Hamiltonien si :*

$$\forall u \in E,\ \forall v \in X, \quad \mathcal{H}(u^\star, v) \leq \mathcal{H}(u^\star, v^\star) \leq \mathcal{H}(u, v^\star).$$

Théorème

Pour $u^\star, v^\star \in E \times X$, $(u^\star, v^\star)$ est un point selle de $\mathcal{H}$ si et seulement si les trois points suivants sont vérifiés :

1. *Il y a dualité forte entre $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{D})$*
2. *$u^\star$ est solution de $(\mathcal{P})$*
3. *$v^\star$ est solution de $(\mathcal{D})$*

Définition

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et propre. Soit $u \in E$. On appelle sous-différentiel de f en u et l'on note $\partial f(u)$ l'ensemble :

$$\partial f(u) = \{s \in E \mid \forall v \in E, \quad f(v) \geq f(u) + \langle s, v - u \rangle\}.$$

Définition

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et propre. Soit $u \in E$. On appelle sous-différentiel de f en u et l'on note $\partial f(u)$ l'ensemble :

$$\partial f(u) = \{s \in E \mid \forall v \in E, \quad f(v) \geq f(u) + \langle s, v-u \rangle\}.$$

Proposition (Règle de Fermat)

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ convexe et propre. Soit $u^\star \in E$. Alors :

$$f(u^\star) = \min_{u \in E} f(u) \iff 0 \in \partial f(u^\star).$$

Théorème

Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $(u^\star, v^\star) \in E \times X$ *est un point selle de* $\mathcal{H}$

(ii) $L_T^* v^\star \in \partial F(u^\star)$ *et* $L_T u^\star \in \partial G^*(-v^\star)$

(iii) $u^\star \in \partial F^*(L_T^* v^\star)$ *et* $-v^\star \in \partial G(L_T A u^\star)$.

Plan

Application à la théorie du contrôle

On prends donc le cas où, pour $n, m \in \mathbb{N}$, $X = \mathbb{R}^n$ et $Y = L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t) & \forall t \in [0, T] \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

et on considère, pour $F : L^2(0, T; \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$ convexe, propre et semi-continue inférieurement un critère à minimiser et $\forall\, y \in \mathbb{R}^n$,

$$G(y) = \begin{cases} 0 \text{ si } \|y - y_f\| \leq \varepsilon \\ +\infty \text{ sinon }, \end{cases}$$

avec $\varepsilon > 0$ fixé. Le problème de minimisation suffisant est donc :

$$\inf_{u \in L^2(0,T;\mathbb{R}^m)} F(u) + G(L_T u).$$

Proposition

G est convexe, propre et semi-continue inférieurement. De plus, $\forall y, p \in \mathbb{R}^n$,

$$G^*(p) = \langle p, y_f \rangle + \varepsilon \|p\|,$$

Application à la théorie du contrôle

Proposition

G est convexe, propre et semi-continue inférieurement. De plus, $\forall y, p \in \mathbb{R}^n$,

$$G^*(p) = \langle p, y_f \rangle + \varepsilon \|p\|,$$

$$y \in \partial G^*(p) \Longleftrightarrow \begin{cases} y = y_f + \varepsilon \dfrac{p}{\|p\|} & \text{si } p \neq 0 \\ y \in \overline{B(\tilde{y_T}, \varepsilon)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Application à la théorie du contrôle

Proposition

G est convexe, propre et semi-continue inférieurement. De plus, $\forall y, p \in \mathbb{R}^n$,

$$G^*(p) = \langle p, y_f \rangle + \varepsilon \|p\|,$$

$$y \in \partial G^*(p) \iff \begin{cases} y = y_f + \varepsilon \dfrac{p}{\|p\|} \ \text{si } p \neq 0 \\ y \in \overline{B(\tilde{y_T}, \varepsilon)} \ \text{sinon.} \end{cases}$$

On introduit le problème dual, pour $J(p) = F(L_T^* p) + G^*(-p)$:

$$\inf_{p \in \mathbb{R}^n} J(p).$$

Pour montrer la contrôlabilité sous contraintes $\mathcal{U}$ de 0 à y_f, l'idée est d'inclure les contraintes dans le critère F, puis de montrer les points suivants :

$$
\begin{aligned}
(i) &\quad \text{le problème dual est stable} \\
(ii) &\quad \inf_{p\in\mathbb{R}^n} J(p) > -\infty \\
(iii) &\quad \exists\, u \in \mathcal{U}, F(u) + G(L_T u) < +\infty.
\end{aligned}
$$

Pour montrer la contrôlabilité sous contraintes $\mathcal{U}$ de 0 à y_f, l'idée est d'inclure les contraintes dans le critère F, puis de montrer les points suivants :

$$\begin{array}{rl} (i) & \text{le problème dual est stable} \\ (ii) & \inf_{p\in\mathbb{R}^n} J(p) > -\infty \\ (iii) & \exists\, u \in \mathcal{U}, F(u) + G(L_T u) < +\infty. \end{array}$$

Le premier point est souvent immédiat si F est suffisamment régulière en un certain sens. Autrement, il peut s'obtenir via une analyse spectrale de L_T^*.

Pour montrer la contrôlabilité sous contraintes $\mathcal{U}$ de 0 à y_f, l'idée est d'inclure les contraintes dans le critère F, puis de montrer les points suivants :

$$
\begin{array}{rl}
(i) & \text{le problème dual est stable} \\
(ii) & \inf\limits_{p\in\mathbb{R}^n} J(p) > -\infty \\
(iii) & \exists\, u \in \mathcal{U}, F(u) + G(L_T u) < +\infty.
\end{array}
$$

Le premier point est souvent immédiat si F est suffisamment régulière en un certain sens. Autrement, il peut s'obtenir via une analyse spectrale de L_T^*.
Le deuxième point s'aborde typiquement par des arguments de coercivité et de continuité de la fonctionnelle duale.

Pour montrer la contrôlabilité sous contraintes $\mathcal{U}$ de 0 à y_f, l'idée est d'inclure les contraintes dans le critère F, puis de montrer les points suivants :

$$
\begin{aligned}
(i) &\quad \text{le problème dual est stable} \\
(ii) &\quad \inf_{p \in \mathbb{R}^n} J(p) > -\infty \\
(iii) &\quad \exists\, u \in \mathcal{U}, F(u) + G(L_T u) < +\infty.
\end{aligned}
$$

Le premier point est souvent immédiat si F est suffisamment régulière en un certain sens. Autrement, il peut s'obtenir via une analyse spectrale de L_T^*.
Le deuxième point s'aborde typiquement par des arguments de coercivité et de continuité de la fonctionnelle duale.
Le troisième est immédiat si $\forall u \notin \mathcal{U},\ F(u) = +\infty$, ou à défaut peut s'obtenir grâce à l'étude des contrôles optimaux.

Une fois ces trois points montrés, on en déduit que :

Proposition

Pour $(u^\star, p^\star)$ *couple de variables primales-duales optimales,*

$$L_T u^\star \in \partial G^*(-p^\star)$$

$$L_T^* p^\star \in \partial F(u^\star).$$

Contrôle non contraint

On s'intéresse ici au cas où $\forall u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$,

$$F(u) = \frac{1}{2} \int_0^T \|u(t)\|^2 \, \mathrm{d}t.$$

Contrôle non contraint

On s'intéresse ici au cas où $\forall u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$,

$$F(u) = \frac{1}{2} \int_0^T \|u(t)\|^2 \,\mathrm{d}t.$$

Proposition

On a :

$$F = F^*$$

et $\forall u, v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$

$$u \in \partial F(v) \iff u = v.$$

On a alors la fonctionnelle duale : $\forall p \in \mathbb{R}^n$,

$$J(p) = \frac{1}{2}\int_0^T \|L_T^* p(t)\|^2 \,\mathrm{d}t - \langle y_f, p\rangle + \varepsilon\|p\|.$$

Proposition

J est continue et 0 vérifie les conditions pour que le problème dual soit stable. De plus, si L_T^* est injectif, alors J est coercive.

On a alors la fonctionnelle duale : $\forall p \in \mathbb{R}^n$,

$$J(p) = \frac{1}{2}\int_0^T \|L_T^* p(t)\|^2 \,\mathrm{d}t - \langle y_f, p\rangle + \varepsilon \|p\|.$$

Proposition

J est continue et 0 vérifie les conditions pour que le problème dual soit stable. De plus, si L_T^* est injectif, alors J est coercive.

Théorème

Si L_T^* est injectif, il existe des contrôles optimaux pour le problème sans contraintes.

On a alors la fonctionnelle duale : $\forall p \in \mathbb{R}^n$,

$$J(p) = \frac{1}{2} \int_0^T \|L_T^* p(t)\|^2 \,\mathrm{d}t - \langle y_f, p \rangle + \varepsilon \|p\|.$$

Proposition

J est continue et 0 vérifie les conditions pour que le problème dual soit stable. De plus, si L_T^* est injectif, alors J est coercive.

Théorème

Si L_T^* est injectif, il existe des contrôles optimaux pour le problème sans contraintes.

Remarque

En dimension finie, l'injectivité de L_T^* est équivalente à la surjectivité de L_T : on retrouve l'équivalence entre surjectivité de L_T et contrôlabilité sans contraintes.

Théorème

Si L_T^* est injectif, alors pour $(u^\star, p^\star)$ variables primale et duale optimales,

$$u^\star = L_T^* p^\star.$$

De plus,

$$\begin{cases} u^\star = 0 \implies \|y_f\| \leq \varepsilon \\ u^\star \neq 0 \implies L_T u^\star = y_f - \varepsilon \dfrac{p^\star}{\|p^\star\|} \in \partial B(y_f, \varepsilon). \end{cases}$$

Théorème

Si L_T^* est injectif, alors pour $(u^\star, p^\star)$ variables primale et duale optimales,

$$u^\star = L_T^* p^\star.$$

De plus,

$$\begin{cases} u^\star = 0 \implies \|y_f\| \leq \varepsilon \\ u^\star \neq 0 \implies L_T u^\star = y_f - \varepsilon \dfrac{p^\star}{\|p^\star\|} \in \partial B(y_f, \varepsilon). \end{cases}$$

Remarque

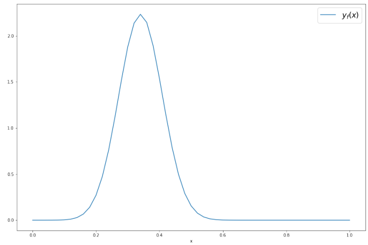
La stricte convexité de J, liée à l'injectivité de L_T^*, permet également de garantir l'unicité du couple $(u^\star, p^\star)$ optimal.

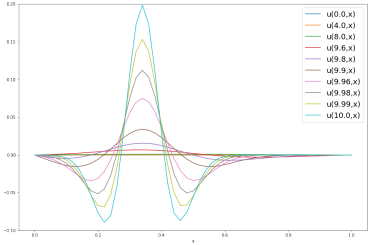
Considérons le système de contrôle de l'équation de la chaleur, où $\Omega = [0, 1]$, $X = L^2(\Omega, \mathbb{R})$, $Y = L^2([0, T] \times \Omega, \mathbb{R})$ et

$$\begin{cases} \dot{y}(t,x) = \Delta y(t,x) + u(t,x) & \forall t, x \in [0, T] \times \Omega \\ y(0,x) = y_0(x) & \forall x \in \Omega \\ y(t,0) = y(t,1) = 0 & \forall t \in [0, T]. \end{cases}$$

Ce système se discrétise sous la forme d'une équation différentielle ordinaire de la forme souhaitée, qu'on peut résoudre numériquement :

Ce système se discrétise sous la forme d'une équation différentielle ordinaire de la forme souhaitée, qu'on peut résoudre numériquement :





Contrôlabilité des opérateurs monotones

À partir de maintenant on va s'intéresser au problème de contrôlabilité sous contraintes suivant :

$$\exists\, u \in L^2(0,T;\mathbb{R}^m), u \geq 0, y_{y_0,u} = y_f.$$

Pour cela, on va prendre des fonctionnelles de coût incluant cette caractéristique : $\forall u \in L^2(0,T;\mathbb{R}^m)$,

$$F(u) = \delta_{u\geq 0} + R(u),$$

où

$$\delta_{u\geq 0} = \begin{cases} 0 \text{ si } \forall t \in [0,T], u(t) \geq 0 \\ +\infty \text{ sinon }, \end{cases}$$

et R est une fonction de régularisation, nulle dans un premier temps.

Définition

Soit $L_T : L^2(0, T; \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^n$ *l'application entrée sortie d'un système de contrôle linéaire. On dit que* L_T *est monotone si*

$$\forall u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m), u \geq 0 \implies L_T u \geq 0.$$

Définition

Soit $L_T : L^2(0,T;\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^n$ l'application entrée sortie d'un système de contrôle linéaire. On dit que L_T est monotone si

$$\forall u \in L^2(0,T;\mathbb{R}^m), u \geq 0 \implies L_T u \geq 0.$$

Remarque

C'est donc équivalent à dire que :

$$\forall y_0 \in \mathbb{R}^n,\ \forall u \in L^2(0,T;\mathbb{R}^m),\ u \geq 0 \implies y_{y_0,u}(T) \geq y_{y_0,0}(T).$$

Définition

Soit $L_T : L^2(0,T;\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^n$ l'application entrée sortie d'un système de contrôle linéaire. On dit que L_T est monotone si

$$\forall u \in L^2(0,T;\mathbb{R}^m), u \geq 0 \implies L_T u \geq 0.$$

Remarque

C'est donc équivalent à dire que :

$$\forall y_0 \in \mathbb{R}^n,\ \forall u \in L^2(0,T;\mathbb{R}^m),\ u \geq 0 \implies y_{y_0,u}(T) \geq y_{y_0,0}(T).$$

Proposition

Supposons que L_T est monotone et surjectif. Alors, $\forall p \in \mathbb{R}^n$,

$$L_T^* p \geq 0 \implies p \geq 0.$$

On s'intéresse à présent à la fonctionnelle non régularisée

$$F(u) = \delta_{u \geq 0}.$$

On s'intéresse à présent à la fonctionnelle non régularisée

$$F(u) = \delta_{u \geq 0}.$$

Théorème

Si L_T est monotone et surjectif, et si $y_f \geq 0$,

$$J : p \mapsto F^*(L_T^* p) + G^*(-p) = \delta_{L_T^* p \leq 0} - \langle y_f, p \rangle + \varepsilon \|p\|$$

est atteint son minimum en 0, donc si le problème dual est stable, il existe un couple de variables primale-duale optimales, qui de plus vérifie :

$$u^\star \geq 0$$

$$L_T^* p^* \leq 0$$

$$\forall t \in [0, T], \forall i \in [\![1, m]\!], u_i^\star(t)(L_T^* p^\star)_i(t) = 0.$$

Remarque

A priori, on ne sait pas si le problème dual est stable ou non. Une analyse spectrale peut potentiellement fournir une réponse en fonction des matrices A et B, mais le manque d'informations fourni par les conditions du premier ordre ne justifie pas une telle recherche. Toutefois, la dualité faible nous donne malgré tout l'information suivante :

Remarque

A priori, on ne sait pas si le problème dual est stable ou non. Une analyse spectrale peut potentiellement fournir une réponse en fonction des matrices A et B, mais le manque d'informations fourni par les conditions du premier ordre ne justifie pas une telle recherche. Toutefois, la dualité faible nous donne malgré tout l'information suivante :

Proposition

Soit $\mathcal{U} \subset L^2(0,T;\mathbb{R}^m)$, et posons $F(u) = \delta_{u \in \mathcal{U}}$. Alors, sans conditions sur L_T ni sur y_f :

$$[\exists p \in \mathbb{R}^n, F^*(L_T^* p) + G^*(-p) < 0] \implies \textit{le système n'est pas contrôlable.}$$

Considérons à présent la fonctionnelle régularisée

$$F(u) = \delta_{u \geq 0} + \frac{1}{2} \int_0^T \|u(t)\|^2 \, \mathrm{d}t \quad \forall u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m).$$

Considérons à présent la fonctionnelle régularisée

$$F(u) = \delta_{u \geq 0} + \frac{1}{2}\int_0^T \|u(t)\|^2 \,\mathrm{d}t \quad \forall u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m).$$

Théorème

Si L_T est monotone et surjectif, et si $y_f \geq 0$,

$$J : p \mapsto F^*(L_T^* p) + G^*(-p) = \frac{1}{2}\int_0^T \|(L_T^* p)_+(t)\| \,\mathrm{d}t - \langle y_f, p\rangle + \varepsilon\|p\|$$

est continue et coercive, et 0 vérifie les conditions pour que le problème dual soit stable, donc il existe un couple de variables primale-duale optimales, qui de plus vérifie :

$$u^\star = (L_T^* p^\star)_+.$$

Plan

Conclusion

Il s'agit donc d'une méthode très générale pour déterminer la contrôlabilité ou non-contrôlabilité de systèmes linéaires autonomes :

- Le choix de la fonction F n'est quasiment pas restreint, permettant la prise en compte de nombreuses contraintes différentes.

Conclusion

Il s'agit donc d'une méthode très générale pour déterminer la contrôlabilité ou non-contrôlabilité de systèmes linéaires autonomes :

- Le choix de la fonction F n'est quasiment pas restreint, permettant la prise en compte de nombreuses contraintes différentes.
- Pour chaque contrainte, chaque choix de régularisation renvoie a priori des informations différentes sur les contrôles optimaux associés, et donc sur des contrôles admissibles pour cette contrainte.

Conclusion

Il s'agit donc d'une méthode très générale pour déterminer la contrôlabilité ou non-contrôlabilité de systèmes linéaires autonomes :

- Le choix de la fonction F n'est quasiment pas restreint, permettant la prise en compte de nombreuses contraintes différentes.
- Pour chaque contrainte, chaque choix de régularisation renvoie a priori des informations différentes sur les contrôles optimaux associés, et donc sur des contrôles admissibles pour cette contrainte.
- Ces résultats se généralisent à la dimension infinie pour la plupart, ouvrant notamment la voie aux EDPs linéaires (équation de la chaleur, des ondes...).

Conclusion

Cette méthode permet l’utilisation de nombreux outils numériques :

- Le problème dual est de dimension significativement plus petite que le primal. Sa résolution en est donc largement facilitée, et les conditions du premier ordre permettent parfois d’en déduire directement une approximation du contrôle optimal.

Conclusion

Cette méthode permet l'utilisation de nombreux outils numériques :

- Le problème dual est de dimension significativement plus petite que le primal. Sa résolution en est donc largement facilitée, et les conditions du premier ordre permettent parfois d'en déduire directement une approximation du contrôle optimal.
- De nombreux algorithmes ont été conçus pour mettre à profit cette structure de problème primal-dual, algorithmes qui permettent une convergence rapide vers les contrôles optimaux (Chambolle-Pock, pour n'en citer qu'un).

Conclusion

Cette méthode permet l'utilisation de nombreux outils numériques :

- Le problème dual est de dimension significativement plus petite que le primal. Sa résolution en est donc largement facilitée, et les conditions du premier ordre permettent parfois d'en déduire directement une approximation du contrôle optimal.
- De nombreux algorithmes ont été conçus pour mettre à profit cette structure de problème primal-dual, algorithmes qui permettent une convergence rapide vers les contrôles optimaux (Chambolle-Pock, pour n'en citer qu'un).
- Cette méthode ouvre la voie à une détermination assistée par ordinateur de la contrôlabilité ou non d'un système, ce qui est particulièrement intéressant pour des EDPs complexes dont la zone théorique de contrôlabilité est encore inconnue.